MAT0222 - Álgebra Linear II

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa

4 de junho de 2003

Exercício 8

Em $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, considere o subespaço $S = [e^{2x}\sin x, e^{2x}\cos x, e^{2x}]$ e o operador linear $D : S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Considere ainda as funções $f_1(x) = e^{2x}\sin x$, $f_2(x) = e^{2x}\cos x$ e $f_3(x) = e^{2x}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Determine:

a. a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de S.

Basta calcularmos D em cada elemento da base e montar a matriz:

$$\begin{aligned} D(f_1(x)) &= 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x = (2,1,0)_{\mathcal{B}} \\ D(f_2(x)) &= 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x = (-1,2,0)_{\mathcal{B}} \\ D(f_3(x)) &= 2e^{2x} = (0,0,2)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b. os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

Começamos achando o polinômio característico, dado por $p_D(x) = det([xId - D]_{\mathcal{B}})$.

$$[xId - D]_{\mathcal{B}} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det([xId - D]_{\mathcal{B}}) = (x-2)^3 + (x-2)$$

Como 2 é a única raiz real desse polinômio, implica que é o único autovalor em $\mathbb{R}$. Temos que $Aut_D(2) = Ker([2Id - D]_{\mathcal{B}})$:

$$[2Id - D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Achando uma base do kernel dessa transformação:

$$\begin{cases} -x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \qquad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow x = y = 0$$

O que implica que um elemento do kernel é da forma $(0, 0, z)$, ou ainda, que $[(0, 0, 1)]$ gera o kernel. Logo $Aut_D(2) = [(0, 0, 1)]$. Resultado que é fácilmente verifícavel tomando qualquer vetor da forma αe^{2x} e derivando. Dessa forma toda função de S que pode ser escrita na forma:

$$\alpha e^{2x}, \alpha \in \mathbb{R}$$

é um autovetor de S associado a 2.

Se consideramos $\mathbb{C}$ como o corpo sobre o qual estamos trabalhando, teremos mais dois autovalores, que seriam raízes do polinômio característico, a dizer $2 + i$ e $2 - i$.

Para achar $Aut_D(2 + i)$ basta encontrarmos o kernel de $[(2 + i)Id - D]\mathcal{B}$:

$$[(2+i)Id - D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} xi + y &= 0 \\ zi &= 0 \end{cases} \qquad z = 0, x = -yi^{-1}$$

Dessa forma um elemento do kernel será dado por $(-yi^{-1}, y, 0)_{\mathcal{B}}$ e portanto $[(-i^{-1}, 1, 0)]$ é um gerador de $Aut_D(2 + i)$.

Por, fim por raciocínio análogo encontramos uma base para $Aut_D(2 - i)$:

$$[(2-i)Id - D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -xi + y &= 0 \\ -zi &= 0 \end{cases} \qquad z = 0, x = yi^{-1}$$

Dessa forma um elemento do kernel será dado por $(yi^{-1}, y, 0)_{\mathcal{B}}$ e portanto $[(i^{-1}, 1, 0)]$ é um gerador de $Aut_D(2 - i)$.

Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em `http://www.feferraz.net`