MAT0222 - Álgebra Linear II

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa

14 de maio de 2003

Exercício 6

Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita.

a. Demonstre que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

Temos uma igualdade entre conjuntos. Precisamos mostrar que $(W_1 + W_2)^0 \subset W_1^0 \cap W_2^0$ e $W_1^0 \cap W_2^0 \subset (W_1 + W_2)^0$.

Seja $\phi \in (W_1 + W_2)^0$. Então, dado $v \in W_1 + W_2$, $\phi(v) = 0$. Notemos que $W_1 \subset W_1 + W_2$, e portanto, dado $w \in W_1 \Rightarrow w \in W_1 + W_2 \Rightarrow \phi(w) = 0 \Rightarrow \phi \in W_1^0$.

De modo análogo, $w \in W_2 \Rightarrow w \in W_1 + W_2 \Rightarrow \phi(w) = 0 \Rightarrow \phi \in W_2^0$.

Mas se $\phi \in W_1^0$ e $\phi \in W_2^0$ então $\phi \in W_1^0 \cap W_2^0$ e portanto $(W_1 + W_2)^0 \subset W_1^0 \cap W_2^0$.

Mostremos agora a outra parte. Seja $\sigma \in W_1^0 \cap W_2^0$. Então, dado $w_1 \in W_1$, $\sigma(w_1) = 0$. Analogamente, dado $w_2 \in W_2$, $\sigma(w_2) = 0$. Seja então $w \in W_1 + W_2$. Então w pode ser escrito como $w_1 + w_2$, para algum $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Temos então que:

$$\sigma(w) = \sigma(w_1 + w_2) = \sigma(w_1) + \sigma(w_2) = 0 + 0 = 0.$$

Mas então $\sigma \in (W_1 + W_2)^0$ e portanto $W_1^0 \cap W_2^0 \subset (W_1 + W_2)^0$. Logo fica provada a igualdade.

b. Demonstre que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

Novamente temos uma igualdade entre conjuntos, vamos proceder da mesma forma. Seja $\sigma \in W_1^0 + W_2^0$. Então podemos encontrar $\omega_1 \in W_1^0$ e $\omega_2 \in W_2^0$ tais que $\sigma = \omega_1 + \omega_2$. Seja então $u \in W_1 \cap W_2$. Temos:

$$\sigma(u) = (\omega_1 + \omega_2)(u) = \omega_1(u) + \omega_2(u).$$

Mas como $u \in W_1$ e $u \in W_2$, $\omega_1(u) = \omega_2(u) = 0$. Logo $\sigma(u) = 0$, para qualquer $u \in W_1 \cap W_2$ e portanto $\sigma \in (W_1 \cap W_2)^0$. Logo $W_1^0 + W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$.

Resta mostrar o outro lado. Seja $\sigma \in (W_1 \cap W_2)^0$. Dado $u \in W_1 \cap W_2$, $\sigma(u) = 0$. Dai decorre que $\sigma \in W_1^0$ e $\sigma \in W_2^0$. Mas então podemos podemos escrever $\sigma(u) = \omega_1(u) + \omega_2(u) \Rightarrow \sigma = \omega_1 + \omega_2$. Logo $\sigma \in W_1^0 + W_2^0$ e portanto $(W_1 \cap W_2)^0 \subset W_1^0 + W_2^0$. Fica assim demonstrada a igualdade.

Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em `http://www.feferraz.net`