

# MAP0313 - Cálculo de Diferenças Finitas

Edson Kenji Iwamoto  
Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa  
Matheus Moreira Costa  
Vagner Aparecido Pedro Junior

20 de novembro de 2003

1. Aproxime a função  $f$  tabelada abaixo por uma função da forma  $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x$ .

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$
$f(x)$	$-1$	$2$	$0$	$-2$	$1$

Queremos aproximar a função  $f$  tabelada por  $g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)$ , onde  $g_0(x) = 1$ ,  $g_1(x) = \cos x$  e  $g_2(x) = \sin x$ . Para acharmos os coeficientes  $a_0, a_1, a_2$ , devemos resolver o sistema normal:

$$\begin{pmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \langle g_0, g_1 \rangle & \langle g_0, g_2 \rangle \\ \langle g_1, g_0 \rangle & \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle \\ \langle g_2, g_0 \rangle & \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0, f \rangle \\ \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \end{pmatrix}$$

Calculando as quantidades conhecidas:

$$\langle g_0, g_0 \rangle = \sum_{i=1}^5 1 = 5$$

$$\begin{aligned} \langle g_0, g_1 \rangle &= \sum_{i=1}^5 1 \cos x_i = \cos -\pi + \cos -\pi/2 + \cos 0 + \cos \pi/2 + \cos \pi \\ &= -1 + 0 + 1 + 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle g_0, g_2 \rangle &= \sum_{i=1}^5 1 \sin x_i = \sin -\pi + \sin -\pi/2 + \sin 0 + \sin \pi/2 + \sin \pi \\ &= 0 - 1 + 0 + 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \sum_{i=1}^5 \cos^2 x_i = 3$$

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sum_{i=1}^5 \cos x_i \sin x_i = 0$$

$$\begin{aligned} \langle g_2, g_2 \rangle &= \sum_{i=1}^5 \sin^2 x_i = 2 \\ \langle g_0, f \rangle &= \sum_{i=1}^5 f(x_i) = 0 \\ \langle g_1, f \rangle &= \sum_{i=1}^5 \cos x_i f(x_i) = 0 \\ \langle g_2, f \rangle &= \sum_{i=1}^5 \sin x_i f(x_i) = -4 \end{aligned}$$

Assim, resolvendo o sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

obtemos  $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, -2)$ .

Ou seja, a aproximação por mínimos quadrados de  $f$  é dada por  $g(x) = -2 \sin x$ . Na figura 1 temos o gráfico da  $f$  e a aproximação encontrada.

2. Sabe-se que os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} p_0(s) &= 1 \\ p_1(s) &= \frac{1}{2}s \\ p_2(s) &= \frac{1}{2}(s^2 - 2) \\ p_3(s) &= \frac{1}{6}(5s^3 - 17s) \end{aligned}$$

são ortogonais ao produto interno

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{s=-2}^2 u(s)v(s).$$

Dada a tabela

$x$	0	0.4	0.8	1.2	1.6
$f(x)$	0.21	1.25	2.31	2.70	2.65

aproxime  $f$  por um polinômio de grau  $\leq 3$  pelo MMQ, relativamente ao produto interno

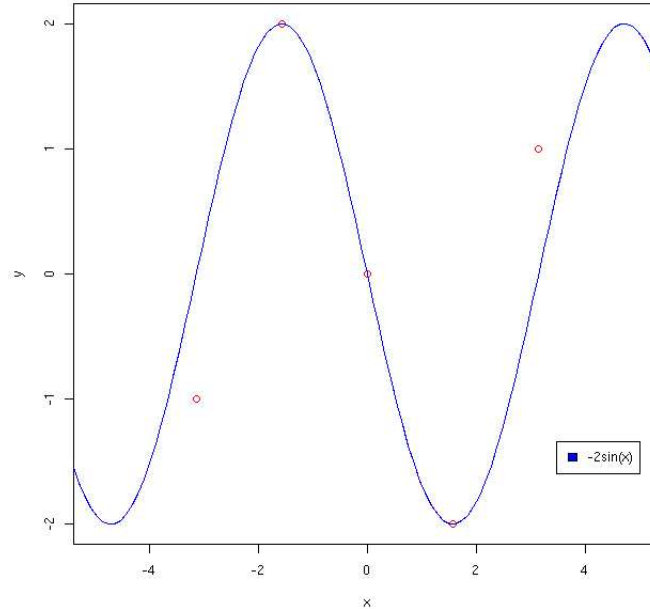


Figura 1: Exercício 1. Aproximação por Mínimos Quadrados de  $f$ .

$$\langle f, g \rangle_2 = f(0)g(0) + f(0.4)g(0.4) + f(0.8)g(0.8) + f(1.2)g(1.2) + f(1.6)g(1.6)$$

usando os polinômios dados acima. Obtenha também o valor da aproximação no ponto 0.7.

Precisamos em primeiro lugar fazer uma mudança de variável que transforme linearmente  $\{0, 0.4, \dots, 1.6\}$  em  $\{-2, -1, \dots, 2\}$ . Como os intervalos são igualmente espaçados basta transformar o intervalo  $[-2, 2]$  em  $[0, 1.6]$ . Assim,  $t(x)$  será dada pela equação da reta que passa pelos pontos  $(0, -2)$  e  $(1.6, 2)$ :

$$t(x) = \frac{4}{1.6}x - 2 = 2.5x - 2 = s$$

Definimos então  $F(x) = f(t(x))$  e achemos a aproximação MMQ para  $F(x)$  sobre aquela base ortogonal de polinômios ao dado produto interno. Como a base é ortogonal, não precisamos montar o sistema normal, de forma que os coeficientes  $a_0, a_1, \dots$  de

$$G(x) = a_0g_0(x) + a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + a_3g_3(x)$$

serão dados por

$$a_k = \frac{\langle g_k, f \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Calculando essas quantidades:

$$\begin{aligned} \langle g_0, g_0 \rangle_2 &= 1^2 + 1^2 + \dots = 5 \\ \langle g_1, g_1 \rangle_2 &= \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \dots = 2.5 \\ \langle g_2, g_2 \rangle_2 &= (1)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \dots = 3.5 \\ \langle g_3, g_3 \rangle_2 &= (-1)^2 + (2)^2 + \dots = 6 \\ \langle g_0, f \rangle_2 &= f(0) + f(0.4) + \dots = 9.12 \\ \langle g_1, f \rangle_2 &= -1 \cdot 0.21 - \frac{1}{2} \cdot 1.25 + \dots = 3.165 \\ \langle g_2, f \rangle_2 &= 1 \cdot 0.21 - \frac{1}{2} \cdot 1.25 - 1 \cdot 2.21 - \frac{1}{2} \cdot 2.7 + 1 \cdot 2.65 = -1.425 \\ \langle g_3, f \rangle_2 &= -1 \cdot 0.21 + 2 \cdot 1.25 + 0 \cdot 2.31 \dots = -0.46 \end{aligned}$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle g_0, f \rangle}{\langle g_0, g_0 \rangle} = \frac{9.12}{5} = 1.824 \\ a_1 &= \frac{\langle g_1, f \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} = \frac{3.165}{2.5} = 1.266 \\ a_2 &= \frac{\langle g_2, f \rangle}{\langle g_2, g_2 \rangle} = \frac{-1.425}{3.5} = -0.40714 \\ a_3 &= \frac{\langle g_3, f \rangle}{\langle g_3, g_3 \rangle} = \frac{-0.46}{6} = -0.07667 \end{aligned}$$

E portanto

$$G(s) = 1.824 + 0.633s - 0.20357(s^2 - 2) - 0.07667(5s^3 - 17s)$$

Trocando  $s$  por  $x$  através da transformação linear obtida anteriormente:

$$g(x) = 1.824 + 0.633(2.5x - 2) - 0.20357((2.5x - 2)^2 - 2) - 0.07667(5(2.5x - 2)^3 - 17(2.5x - 2))$$

é a aproximação de  $f$  por MMQ sobre aqueles polinômios ortogonais dados. Na figura 2, temos  $f$  e o respectivo polinômio  $g(x)$ , mostrando a concordância do ajuste.

Temos ainda que  $p(0.7)$  pode ser aproximado por  $g(0.7) = 2.006934$ .

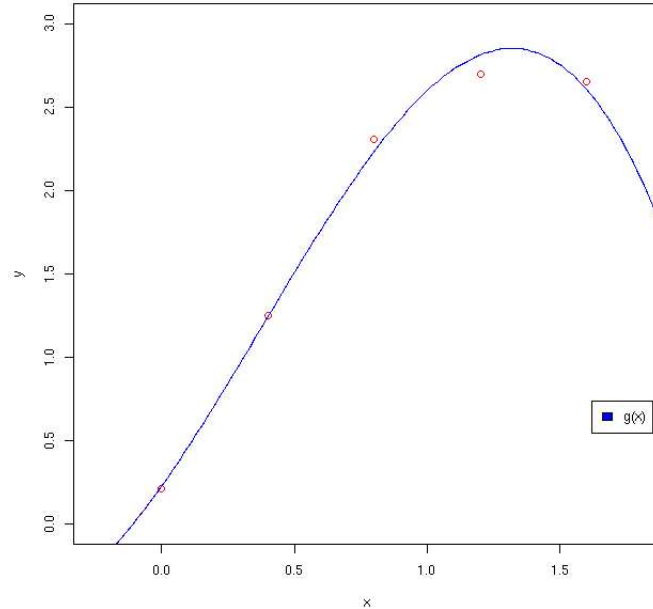


Figura 2: Exercício 2. Aproximação por Mínimos Quadrados de  $f$ .

3. Dada a seguinte tabela de valores de uma função  $f$

$x_i$	0	1	4
$f(x_i)$	1	-1	1

(a) Calcule o polinômio de grau  $\leq 2$  que interpola os pontos tabelados, na forma de Newton (observe que neste caso não é possível usar diferenças simples!).

Façamos a tabela das diferenças divididas:

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
0	1		
1	-1	-2	
4	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{\frac{2}{3} + 2}{4} = \frac{2}{3}$

Através da tabela resolvemos então o problema:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
 &= 1 - 2x + (x^2 - x)\frac{2}{3} = \frac{2x^2}{3} - \frac{8x}{3} + 1
 \end{aligned}$$

Na figura 3 temos o gráfico de  $f$  e o polinômio interpolador (bem sucedido).

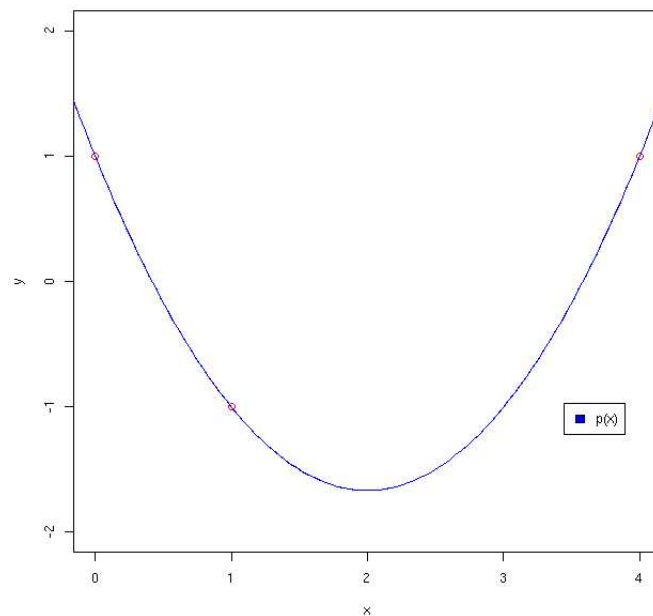


Figura 3: Exercício 3. Interpolação polinomial por Newton de  $f$ .

(b) Dê o valor de  $p(3)$ .

$$p(3) = \frac{18}{3} - \frac{24}{3} + 1 = -1$$

(c) Sabendo que

$$\max_{x \in [0, 4]} |f'''(x)| = 1,$$

delimite o erro cometido em  $x = 3$  ao se aproximar  $f(3)$  pelo valor  $p(3)$ .

$$|E(x)| \leq \frac{|x(x-1)(x-4)|}{3!} \Rightarrow |E(3)| \leq 1$$

4. Determine o número de aplicações dos Métodos dos Trapézios e de Simpson para que o erro cometido seja menor que  $5 \times 10^{-9}$  ao se aproximar

$$\int_2^7 \frac{dx}{x}.$$

Como vamos precisar dessa informação para calcular os dois erros, calculemos  $\max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$  e  $\max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \Rightarrow |f''(x)| = \frac{2}{x^3}, \quad x \in [2, 7] \\ f'''(x) &= \frac{-6}{x^4} \\ f^4(x) &= \frac{24}{x^5} \Rightarrow |f^4(x)| = \frac{24}{x^5}, \quad x \in [2, 7] \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \max_{x \in [2,7]} |f^4(x)| &= f^4(2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \\ \max_{x \in [2,7]} |f''(x)| &= f''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Para o método dos Trapézios, temos que:

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [2,7]} |f''(x)| = \frac{5^3}{12n^2} \frac{1}{4} = 5 \times 10^{-9} \iff n = 22822$$

Para o método de Simpson, analogamente:

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x \in [2,7]} |f^4(x)| = \frac{781.25}{2880} \frac{3}{n^4} = 5 \times 10^{-9} \iff n = 113$$

O que mostra como o método de Simpson é mais eficiente.

5. Dada a tabela:

$x_i$	0.5	1	2	2.5
$y_i$	4.5	3	3	3.3

(a) Determine o polinômio interpolador que passa pelos quatro pontos, usando o polinômio na Forma de Lagrange.

Por Lagrange, sabemos que podemos escrever

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

Encontrando os  $L_i, i = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-2.5)}{(0.5-1)(0.5-2)(0.5-2.5)} = -\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-2.5) \\
&= -\frac{2}{3}\left(x^3 - \frac{11x^2}{2} + \frac{19x}{2} - 5\right) \\
L_1(x) &= \frac{(x-0.5)(x-2)(x-2.5)}{(1-0.5)(1-2)(1-2.5)} = \frac{4}{3}(x-0.5)(x-2)(x-2.5) \\
&= \frac{4}{3}\left(x^3 - 5x^2 + \frac{29x}{4} - \frac{5}{2}\right) \\
L_2(x) &= \frac{(x-0.5)(x-1)(x-2.5)}{(2-0.5)(2-1)(2-2.5)} = -\frac{4}{3}(x-0.5)(x-1)(x-2.5) \\
&= -\frac{4}{3}\left(x^3 - 4x^2 + \frac{17x}{4} - \frac{5}{4}\right) \\
L_3(x) &= \frac{(x-0.5)(x-1)(x-2)}{(2.5-0.5)(2.5-1)(2.5-2)} = \frac{2}{3}(x-0.5)(x-1)(x-2) \\
&= \frac{2}{3}\left(x^3 - \frac{7x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

O que, simplificando as expressões e juntando os monômios de mesmo grau, nos leva a

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{9}{2}L_0(x) + 3L_1(x) + 3L_2(x) + \frac{33}{11}L_3(x) \\
&= -0.8x^3 + 4.8x^2 - 8.8x + 7.8
\end{aligned}$$

- (b) Determine o polinômio interpolador que passa pelos quatro pontos usando a Forma de Newton.

Novamente aqui precisamos fazer a tabela de diferenças divididas:

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0.5	4.5			
1	3	$\frac{3-4.5}{1-0.5} = -3$	$\frac{0+3}{2-0.5} = 2$	
2	3	$\frac{3-3}{2-1} = 0$	$\frac{0.6-0}{2.5-1} = 0.4$	$\frac{0.4-2}{2.5-0.5} = -0.8$
2.5	3.3	$\frac{3.3-3}{2.5-2} = 0.6$		

Com ela pronta, temos de imediato os valores que precisamos. Realizando as manipulações algébricas e reduzindo o polinômio o máximo possível, obtemos:

$$\begin{aligned}
p(x) &= 4.5 - 3(x-0.5) + 2(x-0.5)(x-1) - 0.8(x-0.5)(x-1)(x-2) \\
&= -0.8x^3 + 4.8x^2 - 8.8x + 7.8
\end{aligned}$$

(c) Compare os polinômios obtidos nos itens a. e b.

Os polinômios são iguais - o que já era esperado pois de acordo com a proposição 1.1 do Humes, dados  $n+1$  pontos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , com  $x_0, x_1, \dots, x_n$  distintos entre si, existe um único polinômio  $p$  de grau menor ou igual a  $n$  que passa por esses pontos.

Na figura 4 temos o gráfico de  $f$  e do polinômio interpolador, mostrando o ajuste bem sucedido.

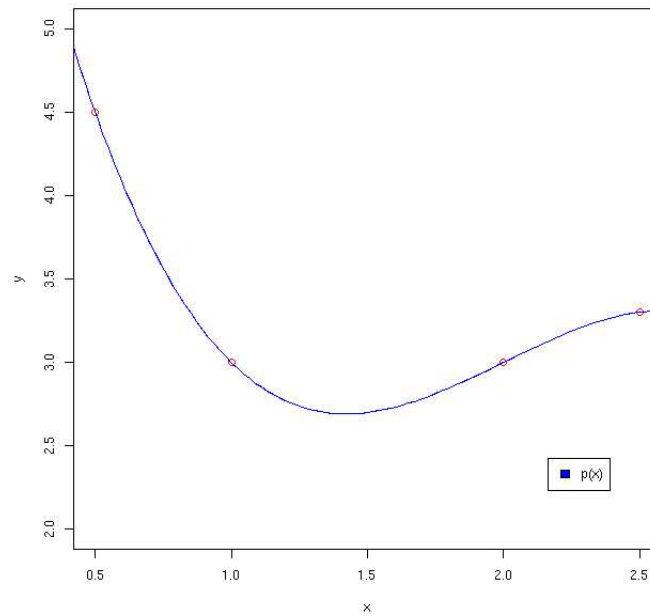


Figura 4: Exercício 5. Interpolação polinomial por Newton/Lagrange de  $f$ .

6. Determine os valores exatos de  $(a, b)$  para os quais o polinômio interpolador da tabela

$x_i$	0	1	2	3	4
$f_i$	3	$a$	1	$b$	$b^2$

tem grau 2. Justifique.

Notando que os intervalos são igualmente espaçados, comecemos calculando a tabela das diferenças simples:

$x_i$	$\Delta^0$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0	3				
1	$a$	$a - 3$			
2	1	$1 - a$	$-2a + 4$		
3	$b$	$b - 1$	$a + b - 2$	$3a + b - 6$	
4	$b^2$	$b^2 - b$	$b^2 - 2b + 1$	$b^2 - 3b - a + 3$	$b^2 - 4b - 4a + 9$

Assim, utilizando a fórmula de Newton-Gregory:

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \\
&+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3} \\
&+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!h^4} \\
&= 3 - \frac{b^2 x}{4} - \frac{37x}{4} + 4ax + \frac{4bx}{3} - \frac{13ax^2}{3} + \frac{73x^2}{8} - \frac{7bx^2}{3} \\
&+ \frac{11b^2 x^2}{24} + \frac{3ax^3}{2} + \frac{7bx^3}{6} - \frac{b^2 x^3}{4} - \frac{13x^3}{4} + \frac{b^2 x^4}{24} - \frac{bx^4}{6} \\
&- \frac{ax^4}{6} + \frac{3x^4}{8}
\end{aligned}$$

Notemos então que para que esse polinômio seja de grau 2, precisamos garantir que os coeficientes de  $x^3$  e  $x^4$  sejam 0, o que se resume a resolver o sistema:

$$\begin{cases} b^2 - 4b - 4a + 9 = 0 \\ -3b^3 + 14b + 18a - 39 = 0 \end{cases}$$

Isolando  $a$  na primeira igualdade e substituindo em  $b$ , obtemos dois possíveis valores para  $b$ :

$$b_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \quad \text{e} \quad b_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

E os dois respectivos valores para  $a$ :

$$a_1 = \frac{14}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{7} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{14}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{7}$$

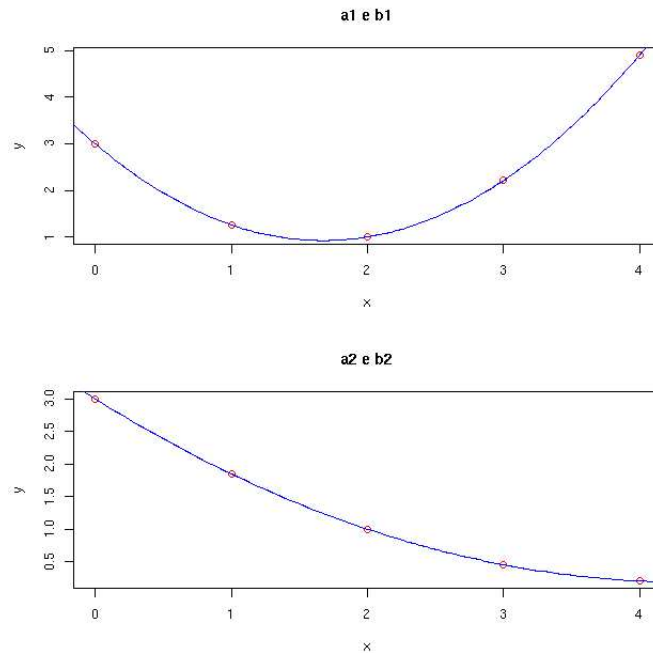


Figura 5: Exercício 6. Interpolação polinomial por Newton de  $f$ .

Assim  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  são os dois valores exatos para  $a$  e  $b$  para os quais a interpolação polinomial tem grau 2. Na figura 5 temos o gráfico de  $f$  e do polinômio interpolador, para os dois possíveis valores de  $a$  e  $b$ .

7. Deseja-se construir uma tabela da função  $f(x) = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$  no intervalo  $[1, 2]$ . Qual deve ser o passo da tabela (diferença de duas abscissas consecutivas) para que o erro numa interpolação “quadrática” (que utiliza um polinômio de grau 2) entre quaisquer três pontos consecutivos da tabela seja menor que  $10^{-2}$ ? (Isto é, qual deve ser o passo  $h$  para que  $|E(x)| \leq 10^{-2}$ ,  $x_k \leq x \leq x_k + 2h$ , onde  $x_k, x_k + h$  e  $x_k + 2h$  são três pontos consecutivos quaisquer da tabela). Justifique sua escolha.

Começemos notando que o erro numa interpolação quadrática através de 3 pontos consecutivos  $x_i, x_j, x_k$  será majorado por

$$|E(x)| \leq \frac{|(x - x_i)(x - x_j)(x - x_k)|}{3!} \max_{x \in [1, 2]} |f'''(x)|$$

Notando então que

$$\max_{x \in [1, 2]} |f'''(x)| = \max_{x \in [1, 2]} \left| \frac{2}{x^3 \ln 2} \right| = \frac{2}{\ln 2}$$

E que, para dados  $x_k, x_k + h, x_k + 2h$ ,

$$\max |(x - x_j)| = 2h$$

Juntando essas duas observações temos que

$$|E(x)| \leq \frac{8h^3}{3 \ln 2} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow h \leq \sqrt[3]{\frac{3 \ln 2}{10}} = 0.4560$$

Portanto o passo  $h$  deve ser de no mínimo 0.4560.

8. Utilizando o MMQ com Polinômios Ortogonais Mônicos definidos pelo produto interno

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-2}^1 P_n(x) P_m(x) dx$$

aproxime  $f(x) = \cos(x)$  no intervalo  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  por um polinômio do 2o. grau. Calcule o erro quadrático correspondente.

Achemos em primeiro lugar uma base ortogonal de polinômios sobre esse produto interno. Tomemos como referência a base

$$\{1, x, x^2\}$$

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, temos

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \\ w_2 &= x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x - \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{3} = x + \frac{1}{2} \\ w_3 &= x^2 - \frac{\langle x^2, x + \frac{1}{2} \rangle}{\langle x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \rangle} \left( x + \frac{1}{2} \right) - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \\ &= x^2 - \frac{-2.25}{2.25} \left( x + \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{3} \\ &= x^2 + x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim uma base ortogonal de polinômios mônicos é dada por

$$\left\{ 1, x + \frac{1}{2}, x^2 + x - \frac{1}{2} \right\}$$

Vamos então fazer a projeção ortogonal de  $F(t) = f(t(x))$  de  $\cos(x)$  sobre esse produto interno. Onde  $t(x)$  transforma linearmente o intervalo  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  em  $[-2, 1]$  e é dada por

$$t(x) = \frac{\pi}{6}(x - 1) + \frac{\pi}{4}$$

Queremos então  $G(t) = a_0g_0 + a_1g_1 + a_2g_2$  que aproxime  $F(t)$  em  $[-2, 1]$ . Basta fazermos a projeção ortogonal de  $F(t)$  sobre aquela base de polinômios.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle F, g_0 \rangle}{\langle g_0, g_0 \rangle} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{\pi}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \\ a_1 &= \frac{\langle F, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} = \frac{0}{\frac{9}{4}} = 0 \\ a_2 &= \frac{\langle F, g_2 \rangle}{\langle g_2, g_2 \rangle} = \frac{\frac{9\sqrt{2}(\pi^2 - 48 + 12\pi)}{\pi^3}}{\frac{27}{20}} = \frac{20\sqrt{2}(\pi^2 - 48 + 12\pi)}{3\pi^3} \end{aligned}$$

De forma que

$$G(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{20\sqrt{2}(\pi^2 - 48 + 12\pi)}{3\pi^3} \left( x^2 - x - \frac{1}{2} \right)$$

Achemos agora  $g(x)$  que aproxima  $f(x)$ , através da transformação inversa de  $t(x)$ , dada por

$$x(t) = \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \frac{6}{\pi} + 1$$

Assim, a aproximação por mínimos quadrados de  $f(x)$  será dada por

$$g(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{20\sqrt{2}(\pi^2 - 48 + 12\pi)}{3\pi^3} \left( \left( \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \frac{6}{\pi} + 1 \right)^2 + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \frac{6}{\pi} + \frac{1}{2} \right)$$

Para calcular o erro quadrático basta fazer

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (g(x) - \cos(x))^2 dx$$

Com o auxílio de um software de manipulação algébrica (Maple), obtemos

```
> evalf(int((g-cos(x))^2,x=-Pi/4..Pi/4));
.01197695624
```

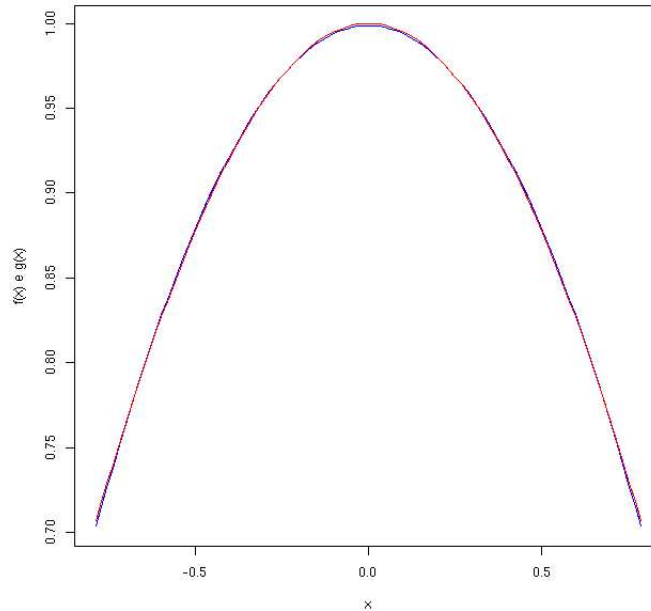


Figura 6: Exercício 8. Aproximação por mínimos quadrados de  $\cos(x)$ .

Assim  $E = 0.01197695624$ .

Na figura 6 temos o gráfico da  $f(x)$  e da  $g(x)$ , mostrando a extrema concordância.

9. Utilizando o método de Simpson para o cálculo de integrais definidas, determinar o valor de  $\ln 2$  com precisão  $10^{-4}$ .

$$\text{Sugestão: } \ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Da sugestão temos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

O erro que cometemos ao aproximarmos essa integral por Simpson será limitado pela relação

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x \in [1,2]} |f^4(x)| = \frac{24}{2880n^4} = 10^{-4} \iff n = \sqrt[4]{\frac{24 \cdot 10^4}{2880}} = 3.02$$

Tomamos então  $n = [n] + 1 = 4$ :

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{8}$$

Usando então a relação  $x_i = x_0 + ih, i = 1, \dots, 2n$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \\ x_2 &= 1 + \frac{2}{8} = \frac{10}{8} \\ x_3 &= 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8} \\ x_4 &= 1 + \frac{4}{8} = \frac{12}{8} \\ x_5 &= 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8} \\ x_6 &= 1 + \frac{6}{8} = \frac{14}{8} \\ x_7 &= 1 + \frac{7}{8} = \frac{15}{8} \\ x_8 &= 1 + \frac{8}{8} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &\approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\ &= \frac{1}{24} \left( 1 + 4\frac{8}{9} + 2\frac{8}{10} + 4\frac{8}{11} + 2\frac{8}{12} + 4\frac{8}{13} + 2\frac{8}{14} + 4\frac{8}{15} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 0.6931 \end{aligned}$$

Logo,

$$\ln 2 = 0.6931 \pm 10^{-4}$$

10. Efetue a Análise Harmônica da função periódica abaixo até o harmônico de terceira ordem.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & , \quad -1/2 < x \leq 0 \\ 2x & , \quad 0 < x \leq 1/2 \end{cases}$$

A função  $f(x)$  é periódica, com período 1. Vamos fazer uma transformação de variáveis para obter  $f(t(x))$  com período  $2\pi$ . Esta mudança é feita através da transformação

$$t(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2},$$

que é encontrada a partir da equação da reta que passa pelos pontos  $(0, -1/2)$  e  $(2\pi, 1/2)$ .

Queremos então

$$G(x) = a_0 + \sum_{k=1}^3 (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Notemos entretanto que  $f(x)$  é uma função par, e como  $\sin kx$  é uma função ímpar, todos os índices  $b_k, k = 1, 2, 3$  se anularão. De modo que só precisamos encontrar os coeficientes  $a_k, k = 0, 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] dx + \int_{\pi}^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} \frac{-x}{\pi} + 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x}{\pi} - 1 dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \\ a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos x dx + \int_{\pi}^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \left( \frac{-x}{\pi} + 1 \right) \cos x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left( \frac{x}{\pi} - 1 \right) \cos x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right] = \frac{4}{\pi^2} \\ a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos 2x dx + \int_{\pi}^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \left( \frac{-x}{\pi} + 1 \right) \cos 2x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left( \frac{x}{\pi} - 1 \right) \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} [0 + 0] = 0 \\ a_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos 3x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos 3x dx + \int_{\pi}^{2\pi} f \left[ \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right] \cos 3x dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi \left( \frac{-x}{\pi} + 1 \right) \cos 3x dx + \int_\pi^{2\pi} \left( \frac{x}{\pi} - 1 \right) \cos 3x dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{9\pi} + \frac{2}{9\pi} \right] = \frac{4}{9\pi^2}
\end{aligned}$$

Assim, chegamos em

$$G(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos x + \frac{4}{9\pi^2} \cos 3x$$

Invertendo a transformação  $t(x)$

$$t(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = (2x + 1)\pi$$

e voltando em  $G(x)$ :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos(2x + 1)\pi + \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi(2x + 1)$$

Que é a função aproximadora obtida para  $f(x)$ . Na figura 7 temos o gráfico de  $f(x)$  e de  $F(x)$ .

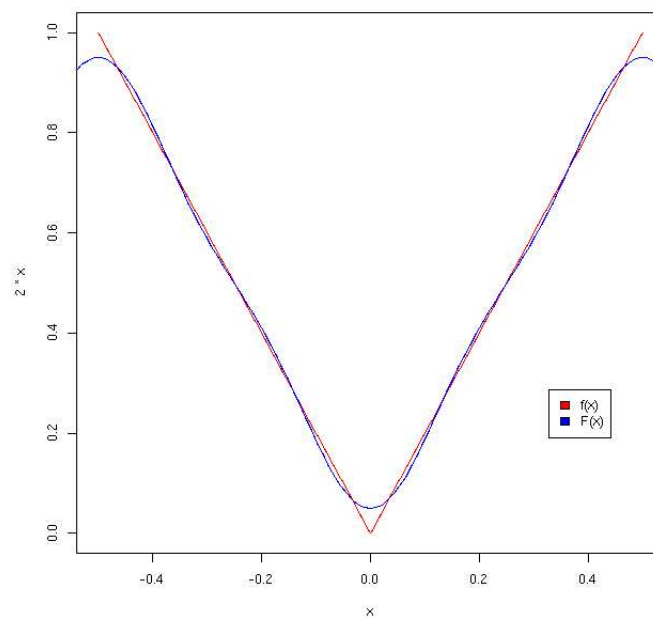


Figura 7: Exercício 10. Análise harmônica de ordem 3 para  $f(x)$ .

## Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em <http://www.feferraz.net>

Copyright (c) 1999-2005 Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa.  
É dada permissão para copiar, distribuir e/ou modificar este documento sob os termos da Licença de Documentação Livre GNU (GFDL), versão 1.2, publicada pela Free Software Foundation;  
Uma cópia da licença em está inclusa na seção intitulada "Sobre / Licença de Uso".