MAE526 - Tópicos de Estatística / Teoria do Risco

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa

5 de maio de 2005

Lista 2

1. Considere a fórmula recursiva de Panjer, para distribuição de somas aleatórias, dada por:

$$g_r = P(S_N = r) = \sum_{i=1}^{r} \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i g_{r-i},$$

onde:

$$\begin{aligned} S_N &= Y_1 + \ldots + Y_N \\ p_k &= P(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots \\ f_k &= P(Y_i = k), \quad k = 1, 2, \ldots \\ f_0 &= P(Y_i = 0) = 0 \\ g_0 &= P(S_N = 0) = p_0 = P(N = 0) \\ g_1 &= P(S_N = 1), \quad g_0, g_1, \ldots, g_{r-1} \to g_r \end{aligned}$$

Seja $N \sim Po(\lambda = 2)$ e Y v.a. discreta com densidade de probabilidades dada por:

Y	1	2	3	4
f_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

Obtenha:

(a) g_1, g_2, g_3, g_4, g_5.

Notemos que para N com distribuição Poisson temos que $a = 0$ e $b = \lambda$, no caso $b = 2$. Pela fórmula de Panjer temos:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \sum_{i=1}^{1}\left(a+\frac{bi}{1}\right) f_i g_{1-i} = 2 f_1 g_0 = 2\frac{1}{8}e^{-2} = 0.034 \\
g_2 &= \sum_{i=1}^{2}\left(a+\frac{bi}{2}\right) f_i g_{2-i} = f_1 g_1 + 2 f_2 g_0 = \frac{1}{8}0.034 + 2\frac{1}{4}e^{-2} \\
&= 0.072 \\
g_3 &= \sum_{i=1}^{3}\left(a+\frac{bi}{3}\right) f_i g_{3-i} = \frac{2}{3} f_1 g_2 + \frac{4}{3} f_2 g_1 + 2 f_3 g_0 \\
&= \frac{2}{3}0.12 \times 0.072 + \frac{4}{3}0.25 \times 0.034 + 20.25 \times 0.14 \\
&= 0.085 \\
g_4 &= \sum_{i=1}^{4}\left(a+\frac{bi}{4}\right) f_i g_{4-i} = \frac{2}{4} f_1 g_3 + f_2 g_2 + \frac{6}{4} f_3 g_1 + 2 f_4 g_0 \\
&= 0.137 \\
g_5 &= \sum_{i=1}^{5}\left(a+\frac{bi}{5}\right) f_i g_{5-i} = \frac{2}{5} f_1 g_4 + \frac{4}{5} f_2 g_3 + \frac{6}{5} f_3 g_2 + \frac{8}{5} f_4 g_1 + 2 f_5 g_0 \\
&= 0.066
\end{aligned}
$$

(b) Escreva um programa para calcular $g_1, \ldots, g_{20}$.
Com a função abaixo em R calculamos o valor de todo g_k, para $k = 0, 1, \ldots, R$:

```
> calcula.g
function (R)
{
    f <- function(k) {
        dist <- numeric(4)
        dist[1] <- 1/8
        dist[2] <- 1/4
        dist[3] <- 1/4
        dist[4] <- 3/8
        if (k < 5 & k > 0) {
            dist[k]
        }
        else {
            0
        }
    }
    g <- numeric(R + 1)
    g[0 + 1] <- exp(-2)
    b <- 2
    for (r in 1:R) {
```

```
        for (i in 1:r) {
            g[r + 1] <- g[r + 1] + (b * (i/r) * f(i) * g[r -
                i + 1])
        }
    }
    g
}
```

```
> prob <- calcula.g(20)
```

obtendo os valores:

	prob
g_0	0.1353
g_1	0.0338
g_2	0.0719
g_3	0.0849
g_4	0.1375
g_5	0.0657
g_6	0.0828
g_7	0.0782
g_8	0.0767
g_9	0.0465
g_{10}	0.0454
g_{11}	0.0370
g_{12}	0.0295
g_{13}	0.0194
g_{14}	0.0162
g_{15}	0.0119
g_{16}	0.0086
g_{17}	0.0057
g_{18}	0.0042
g_{19}	0.0029
g_{20}	0.0020

Onde observamos que os valores são iguais aos calculados manualmente pela fórmula de recursão no item anterior. Com a seguinte função fizemos também uma simulação dessa soma de variáveis aleatórias:

```
> simula
```

```
function (N)
{
    sn.obs <- function(x) {
        sum(sample(1:4, size = x, prob = c(1/8, 1/4, 1/4, 3/8),
            replace = T))
```

```
    }
    tam <- rpois(N, 2)
    obs <- sapply(tam, sn.obs)
    obs
}
```

Para uma simulação com $N = 10^5$, obtivemos a tabela abaixo de proporções observadas:

	prob
g_0	0.1354
g_1	0.0337
g_2	0.0723
g_3	0.0862
g_4	0.1369
g_5	0.0653
g_6	0.0836
g_7	0.0787
g_8	0.0781
g_9	0.0453
g_{10}	0.0439
g_{11}	0.0367
g_{12}	0.0293
g_{13}	0.0192
g_{14}	0.0162
g_{15}	0.0117
g_{16}	0.0086
g_{17}	0.0056
g_{18}	0.0046
g_{19}	0.0029
g_{20}	0.0021

Onde vemos que os valores simulados estão bem próximos dos calculados pela fórmula de recursão. Na Figura 1 temos o diagrama de dispersão desses valores, onde vemos que os resultados simulados estão de acordo com o esperado pelo modelo teórico.

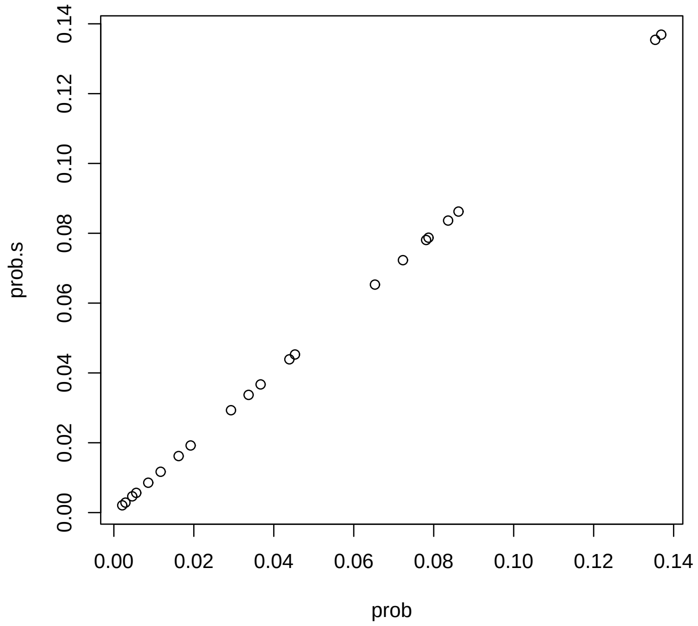

Figura 1: Diagrama de dispersão para as probabilidades calculadas pela fórmula de Panjer e as proporções observadas na simulação com $N = 10^5$.

2. Se $N \sim Po(\lambda)$, temos que:

$$\frac{S_N - E(S_N)}{\sqrt{Var(S_N)}} \overset{\lambda \to \infty}{\to} N(0,1)$$

Usando Y definida no exercício anterior, calcule $E(S_N)$, $Var(S_N)$ e usando esses valores obtenha os quantis superioes $s_{0.05}$ e $s_{0.01}$ pela aproximação normal:

$$P(S_N > s_{0.05}) = 0.05 \qquad \text{e} \qquad P(S_N > s_{0.01}) = 0.01$$

Das notas de aula temos que:

$$E(S_N) = E(N)E(Y) \qquad \text{e} \qquad Var(S_N) = E^2(Y)Var(N) + E(N)Var(Y)$$

Sabemos que $E(N) = Var(N) = \lambda = 10$. Calculando $E(Y)$ e $Var(Y)$ temos:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{8} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4} + 4\frac{3}{8} = 2.875 \\ Var(Y) &= (1-2.875)^2\frac{1}{8} + (2-2.875)^2\frac{1}{4} + (3-2.875)^2\frac{1}{4} + (4-2.875)^2\frac{3}{8} \\ &= 1.1094 \end{aligned}$$

Temos portanto que:

$$E(S_N) = 10 \times 2.875 = 28.75 \qquad \text{e} \qquad Var(S_N) = 2.875^2 \times 10 + 10 \times 1.1094 = 93.75$$

E assim, aproximamos a distribuição de S_N por:

$$S_N \sim N(28.75, 93.75)$$

Obtemos então no R os valores:

$$s_{0.05} = 44.68 \qquad \text{e} \qquad s_{0.01} = 51.27$$

3. Podemos também aproximar S_N por uma gama transladada, com parâmetros β, γ e k. Precisamos dos valores:

$$\begin{aligned} m &= E(S_N) = 28.75 \\ \sigma^2 &= Var(S_N) = 93.75 \\ \delta &= \frac{E(S_N - E(S_N))^3}{\sqrt{Var(S_N)^3}} = 0.36 \end{aligned}$$

Donde obtemos os parâmetros da gama:

$$
\begin{aligned}
k &= m - \frac{2\sigma}{\gamma} = 29 \\
\beta &= \frac{2}{\delta\sigma} = 5.7 \\
\gamma &= \frac{4}{\delta^2} = 3086
\end{aligned}
$$

Para termos os quantis empíricos dessa distribuição, primeiro geramos 10^5 valores de uma $Gama(\beta, \gamma)$ e depois somamos k:

```
> gama.obs <- rgamma(10^5, rate = gama, shape = beta)
> gama.obs <- gama.obs + k
```

Para ver os quantis empiricos $c_{0.05}$ e $c_{0.01}$ fazemos:

```
> quantile(gama.obs, prob = c(0.95, 0.99))
```

```
  95%   99%
28.75 28.75
```

Temos na Tabela 1 a comparação dos quantis pedidos pela aproximação Normal e pela Gama. Observamos que a aproximação pela Gama produziu resultados menores em geral que a pela Normal.

	0.01	0.05
c	28.19	28.24
s	44.68	51.27

Tabela 1: Comparação de $c_{0.05}, c_{0.01}$ e $s_{0.01}, s_{0.05}$

Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em `http://www.feferraz.net`