

# MAE0328 - Análise de Regressão

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa  
Matheus Moreira Costa  
Vagner Aparecido Pedro Junior

5 de maio de 2004

## Lista 1<sup>1</sup>

1. Considere o modelo de regressão linear simples definido por

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

em que  $\beta_0$  é conhecido,  $x_i$  são constantes conhecidas e  $\epsilon_i$  são independentes com distribuição normal de média zero e variância  $\sigma^2$ , desconhecida.

- (a) Obtenha o estimador de mínimos quadrados de  $\beta_1$ . Mostre que esse estimador é de máxima verossimilhança.

Começemos montando a função soma de quadrados, que queremos minimizar:

$$S(\beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \quad (1)$$

Derivando (1) em relação a  $\beta_1$  e igualando a 0:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \hat{\beta}_1 x_i) &= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \beta_0 x_i - \hat{\beta}_1 x_i^2) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0 \\ \Rightarrow \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \beta_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Que é o estimador de mínimos quadrados de  $\beta_1$ . Calculemos agora o estimador de máxima verossimilhança. Começemos notendo que a função de verossimilhança pode ser escrita como:

---

<sup>1</sup>Powered by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> and R 1.8.1

$$\begin{aligned}
L(y_1, \dots, y_n, \beta_0, \beta_1, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \right\}
\end{aligned}$$

A função de log-verossimilhança fica dada então por:

$$\begin{aligned}
\log L(y_1, \dots, y_n, \beta_0, \beta_1, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2
\end{aligned}$$

Precisamos então resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\delta \log L}{\delta \beta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \hat{\beta}_1 x_i) x_i = 0 \\ \frac{\delta \log L}{\delta \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = 0 \end{cases}$$

Isolando  $\hat{\sigma}^2$  na segunda equação e substituindo na primeira obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \hat{\beta}_1 x_i) x_i = 0 \\
\Rightarrow n \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \hat{\beta}_1 x_i) x_i &= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \hat{\beta}_1 x_i) x_i = 0 \\
\Rightarrow \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \beta_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Que é o mesmo estimador obtido em (2), demonstrando a identidade pedida.

- (b) Obtenha a distribuição do estimador obtido no item a. Compare a variância desse estimador com a variância do estimador de  $\beta_1$  quando os dois parâmetros,  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , são desconhecidos.

Começemos notando que  $\hat{\beta}_1$  é uma combinação linear de normais, o que decorre do fato de que a única parte aleatória em (2) ser  $y_i$ , que por sua vez é uma variável aleatória por causa dos erros, que são normais. Assim sendo,  $\hat{\beta}_1$  também é uma variável aleatória com distribuição normal. Basta encontramos sua média e variância para determinarmos completamente sua função de distribuição. Começemos então calculando a esperança de (2):

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \beta_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i E(y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \beta_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Notando que  $E(y_i)$  sob o modelo proposto é dada por  $\beta_0 + \beta_1 x_i$ :

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \beta_0}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta_1 x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \beta_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Donde temos que  $\hat{\beta}_1$  é um estimador não viesado para  $\beta_1$ . Resta então calcularmos sua variância:

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \beta_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

Como toda  $Cov(y_i, y_j) = 0, i \neq j$ , devido à independência dos erros, temos:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sum_{i=1}^n Var(x_i y_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 Var(y_i) \\ &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Assim por (4), (5) e pelas considerações já feitas anteriormente temos que:

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

Seja  $\hat{\beta}_1'$  o estimador de  $\beta_1$  no modelo de regressão simples normal, quando  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são desconhecidos. Temos <sup>2</sup> que:

$$Var(\hat{\beta}_1') = \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad (6)$$

Comparemos agora (5) e (6). O numerador das duas expressões é o mesmo, o que vai decidir a comparação vai ser o denominador. Notemos que:

---

<sup>2</sup>Neter et al. (1996). *Linear Applied Statistical Models*. Irwin.

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \Rightarrow (5) \leq (6).$$

Assim, concluímos que a variância do estimador para  $\beta_1$  quando  $\beta_0$  é conhecido, é menor do que a variância do estimador para  $\beta_1$  quando os dois parâmetros são desconhecidos, o que era intuitivo.

- (c) Construa o intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $\gamma$  para  $E(y|x_0)$ , a resposta média para  $x = x_0$ . Justifique.

Começemos definindo  $\hat{y}_{x_0}$  como um estimador para  $E(y|x_0)$ . Uma definição razoável seria:

$$\hat{y}_{x_0} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = \hat{y}_0 \quad (7)$$

É imediato que (7) é um estimador não viesado para  $E(y|x_0)$ , pois:

$$E[\hat{y}_{x_0}] = \beta_0 + \beta_1 x_0 = E(y|x_0)$$

Temos ainda que:

$$Var(\hat{y}_{x_0}) = Var(\beta_0 + \hat{\beta}_1 x_0) = x_0^2 Var(\hat{\beta}_1) = x_0^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

Notemos ainda que a distribuição de  $\hat{y}_{x_0}$  é conhecida, pois estamos tratando novamente com uma composição de normais. Assim (7) segue uma distribuição normal, a dizer:

$$\hat{y}_{x_0} \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_0, x_0^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right)$$

A obtenção de intervalos de confiança para médias em populações normais é imediata. Precisamos apenas um estimador para  $\sigma^2$ , que é desconhecido. Utilizemos  $MSE$ , que sob nosso modelo fica como:

$$MSE = \frac{S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}}{n - 1}$$

Onde  $S_{yy} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{y}^2$  e  $S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$ . Note-se que os graus de liberdade do numerador são  $n - 1$  ao invés de  $n - 2$  do MSE no modelo com  $\beta_0$  e  $\beta_1$  desconhecidos, pois não perdemos um grau de liberdade como já conhecemos  $\beta_0$ .

Temos então que:

$$\frac{\hat{y}_0 - (\beta_0 + \beta_1 x_0)}{\sqrt{MSE \frac{x_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}} \sim t_{(n-1)}$$

Um intervalo de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$  é dado então por:

$$\left[ \hat{y}_0 - t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{MSE \frac{x_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}, \hat{y}_0 + t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{MSE \frac{x_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \right].$$

Podemos verificar empiricamente esse resultado obtido através de uma simulação.

```

pertence.intervalo <- function(x,y,x0,b0,b1,a) {
n = length(x)
talpa2 = qt(1-a/2,n-1)
b1.chapeu <- estima.b1(x,y,b0)
y0 <- b0 + b1.chapeu*x0
MSE <- ((sum(y^2) - sum(y)^2/n)
- b1.chapeu*(sum(x*y) - sum(x)*sum(y)/n))/(n-1)
true <- b1*x0 + b0
lower.bound <- y0 - talpa2*sqrt(MSE*x0^2/sum(x^2))
upper.bound <- y0 + talpa2*sqrt(MSE*x0^2/sum(x^2))

if (true >= lower.bound & true <= upper.bound) { return(1) }
else { return(0) }
}

estima.b1 <- function(x,y,b0) {
sum(x*y)/sum(x^2) - b0*sum(x)/sum(x^2)
}

E <- rnorm(1000*1000,0,0.1)
X <- matrix(rep(runif(1000),1000),byrow=T,ncol=1000)
Y <- 2*X + 3 + E # Fazemos b0 = 3 e b1 = 2

tot <- NULL
for (i in 1:1000) {
tot <- c(tot,pertence.intervalo(X[i,],Y[i,],0.5,3,2,0.05))
}

```

O script em *R* acima simula 1000 amostras de tamanho 1000 dessa população e constrói 1000 intervalos de confiança, armazenando no vetor *tot* o número de vezes que o intervalo conteve o parâmetro. Usamos  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta_0 = 3$  e  $\beta_1 = 2$ . Rodando o script acima obtemos:

```

> source('mae328-11.R')
> mean(tot)
[1] 0.951
> source('mae328-11.R')

```

```
> mean(tot)
[1] 0.946
```

O que está de acordo com nosso modelo.

6. Acredita-se que a umidade de um produto influencia a densidade final do produto. Num experimento, a umidade foi controlada e a densidade final foi medida resultando os seguintes dados (codificados).

umidade(x)	4.7	5.0	5.2	5.2	5.9	4.7	5.9	5.2	5.2	5.3	5.9	5.6	5.6
densidade(y)	3	3	4	5	10	2	9	3	3	7	6	6	4

- (a) Se adotarmos o modelo de regressão linear, qual o significado prático de  $\beta_1$ ?

$\beta_1$  será a mudança média ocasionada na densidade do produto, por uma mudança unitária na umidade.

- (b) Ajuste o modelo e construa a ANOVA.

Vamos ajustar o modelo linear simples dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

Começemos calculando  $S_{xx}$  e  $S_{xy}$ :

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 2.109 \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x}) = 10.7$$

Obtemos então nossos estimadores para  $\beta_0$  e  $\beta_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 5.073 \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = -21.848$$

Para construirmos a tabela de ANOVA, calculemos ainda as somas de quadrados:

$$SSR = \hat{\beta}_1 S_{xy} = 54.28 \quad SSE = S_{yy} - SSR = 19.72$$

Temos então que a tabela ANOVA será dada por:

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	$F_0$
Regression	54.28	1	54.28	30.27
Residual	19.72	11	1.793	
Total	74	12		

- (c) Teste as hipóteses  $H_0 : \beta_1 = 0$  versus  $H_1 : \beta \neq 0$ . Que modelo você adotaria para esses dados?

Para testar essa hipótese, basta utilizarmos a estatística  $F_0$ , que sob  $H_0$  segue uma  $F_{(1, n-2)}$ . Utilizando o  $R$  para obter o valor descritivo, temos:

$$\alpha^* = P(F_0 \geq 30.27) = 0.00019$$

O que nos leva a rejeitar  $H_0$  a  $alpha = 0.001$ , concluindo que o modelo linear proposto é adequado para esses dados.

8. Adotou-se o modelo  $E(y|x) = \beta_1 x$  na situação em que o verdadeiro modelo era  $E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$ . Prove que o estimador de mínimos quadrados de  $\beta_1$  é viciado para  $\beta_1$  e determine seu vício.

Sob o primeiro modelo, temos<sup>3</sup> que o estimador de mínimos quadrados de  $\beta_1$  é dado por:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Calculemos sua esperança desse estimador sob o modelo correto:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_1) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i E(y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\beta_0 + \beta_1 x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_0 x_i + \beta_1 x_i^2)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \beta_1 \end{aligned}$$

De onde decorre que  $\hat{\beta}_1$  é viciado para  $\beta_1$ , tendo vício dado por:

$$B(\hat{\beta}_1) = E(\beta_1 - E(\hat{\beta}_1)) = E\left(\beta_1 - \left(\frac{\beta_0 \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \beta_1\right)\right) = \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

17. Considere o modelo de regressão linear simples e deduza um intervalo de confiança para  $E(y|x_i) - E(y|x_j)$ . Se  $x_i = x_j + 1$ , como ficaria o intervalo? Por que nesse caso não é necessário conhecer os valores de  $x_i$  e  $x_j$ ?

Começemos notando que:

$$E(y|x_i) - E(y|x_j) = \beta_0 + \beta_1 x_i - (\beta_0 + \beta_1 x_j) = \beta_1 (x_i - x_j)$$

Um estimador pontual razoável para essa quantidade é dado por:

---

<sup>3</sup>Montgomery and Peck. (1982). *Introduction to Linear Regression Analysis*.

$$\hat{d} = \hat{\beta}_1(x_i - x_j)$$

Esse estimador entretanto é uma combinação linear de  $\hat{\beta}_1$ , pois  $x_i$  e  $x_j$  são constantes. Como  $\hat{\beta}_1$  é normal, temos que  $\hat{d}$  também será normal, com:

$$E(\hat{d}) = E(\hat{\beta}_1(x_i - x_j)) = (x_i - x_j)E(\hat{\beta}_1) = (x_i - x_j)\beta_1$$

$$Var(\hat{d}) = Var(\hat{\beta}_1(x_i - x_j)) = (x_i - x_j)^2 Var(\hat{\beta}_1) = \frac{(x_i - x_j)^2 \sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

É imediato portanto que:

$$\frac{\hat{d} - d}{\sqrt{\frac{(x_i - x_j)^2 MSE}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}}} \sim t_{(n-2)}$$

E assim um intervalo de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$  para  $d = \beta_1(x_i - x_j)$  será dado por:

$$\left[ \hat{\beta}_1(x_i - x_j) - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{(x_i - x_j)^2 MSE}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}}, \hat{\beta}_1(x_i - x_j) + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{(x_i - x_j)^2 MSE}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}} \right]$$

Alternativamente, se  $x_i = x_j + 1$  teremos que queremos estimar:

$$E(y|x_i) - E(y|x_j) = \beta_1(x_j - x_j + 1) = \beta_1.$$

Ou seja, queremos um intervalo de confiança para  $\beta_1$ . O que obtemos fazendo  $(x_i - x_j) = 1$  no intervalo de confiança anterior. O intervalo de confiança não depende de  $x_i$  e  $x_j$  justamente porque  $E(y|x_i) - E(y|x_j)$  nesse caso independente de  $x_i$  e  $x_j$ .

23. Os dados da tabela B4 contém dados para 24 casas vendidas em Erie, Pensilvânia.

(a) Ajuste um modelo de regressão linear simples relacionando o preço da casa com as taxas atuais ( $x_1$ ).

Vamos ajustar o modelo linear simples dado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$$

Começemos calculando  $S_{xx}$  e  $S_{xy}$ :

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 57.56 \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x}) = 191.4$$

Obtemos então nossos estimadores para  $\beta_0$  e  $\beta_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 3.324 \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 13.32$$

Para construirmos a tabela de ANOVA, calculemos ainda as somas de quadrados:

$$SSR = \hat{\beta}_1 S_{xy} = 636.2 \quad SSE = S_{yy} - SSR = 192.9$$

Temos então que a tabela ANOVA será dada por:

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	$F_0$
Regression	636.2	1	636.2	72.6
Residual	192.9	22	8.768	
Total	829	23		

(b) Teste a significância da regressão.

Basta calcularmos o nível descritivo do teste. A partir da tabela de ANOVA temos:

$$\alpha^* = P(F_0 \geq 72.6) = 2.1 \times 10^{-8}$$

O que garante a rejeição de  $H_0 : \beta_1 = 0$  para qualquer  $\alpha > \alpha^* = 2.1 \times 10^{-8}$ .

(c) Qual a porcentagem da variabilidade do preço de venda que está sendo explicada por esse modelo?

Basta calcularmos o coeficiente de determinação:

$$R^2 = \frac{SSR}{S_{yy}} = \frac{636.2}{829} = 0.767$$

O que nos diz que 76% da variabilidade do preço de venda está sendo explicada por este modelo.

(d) Encontre um intervalo de confiança de 95% para  $\beta_1$ .

Temos que um intervalo de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$  para  $\beta_1$  no modelo linear simples é dado por:

$$\left[ \hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}}, \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}} \right]$$

Substituindo os valores conhecidos obtemos:

$$IC(\hat{\beta}_1, 0.95) = [2.515, 4.134]$$

- (e) Encontre um intervalo de confiança de 95% para o preço média de venda para uma casa cujas taxas atuais são \$750.00.

Um intervalo de confiança com  $\gamma = 1 - \alpha$  para  $E(y|x_0)$  nesse modelo é dado por:

$$\left[ \hat{y}_0 - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{MSE \left( \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}, \hat{y}_0 + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{MSE \left( \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)} \right]$$

Substituindo os valores conhecidos e notando que  $x_1 = 750/1000 = 0.75$ , temos que um intervalo de confiança para  $y_0$  será dado por:

$$IC(y_0, 0.95) = [11.06, 20.56].$$

## Sobre

A versão eletrônica desse arquivo pode ser obtida em <http://www.feferraz.net>

Copyright (c) 1999-2005 Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa.  
É dada permissão para copiar, distribuir e/ou modificar este documento sob os termos da Licença de Documentação Livre GNU (GFDL), versão 1.2, publicada pela Free Software Foundation;  
Uma cópia da licença em está inclusa na seção intitulada "Sobre / Licença de Uso".