MAE126 - Noções de Estatística II

Turma Prof. Popov

5 de junho de 2006

Correção da Lista 6

1. Da população $X \sim N(30, 89)$ retirou-se uma amostra casual simples de $n = 9$ elementos. Da população $Y \sim N(45, 123)$ retirou-se uma amostra casual simples de $m = 8$ elementos, independente da primeira. Sejam S_1^2 e S_2^2 as variâncias amostrais.

   (a) Encontre o valor de a tal que $P(S_1^2/S_2^2 < a) = 0,95$
   Comecemos notando que:

   $$U = \frac{(n-1)S_1^2}{89} = \frac{8S_1^2}{89} \sim \chi^2_{(8)}$$

   $$V = \frac{(m-1)S_2^2}{123} = \frac{7S_1^2}{123} \sim \chi^2_{(7)}$$

   Ainda:

   $$\frac{\frac{U}{n-1}}{\frac{V}{m-1}} = \frac{\frac{U}{8}}{\frac{V}{7}} = \frac{\frac{S_1^2}{89}}{\frac{S_2^2}{123}} = \frac{123}{89}\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(8,7)$$

   Queremos a tal que:

   $$\begin{aligned} P(S_1^2/S_2^2 < a) &= 0,95 \Rightarrow P\left(\frac{123}{89}\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{123}{89}a\right) \\ &= P\left(F_{(8,7)} < \frac{123}{89}a\right) = 0,95 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{123}{89}a = 3,73 \\ &\Rightarrow a = 2,69 \end{aligned}$$

   (b) Encontre o valor de b tal que $P(S_1^2/S_2^2 > b) = 0,95$
   Por raciocíonio análogo:

   $$P(S_1^2/S_2^2 > b) = P\left(S_2^2/S_1^2 < \frac{1}{b}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && P\left(\frac{89}{123}\frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{89}{123}\frac{1}{b}\right) \\
&= && P\left(F_{(7,8)} < \frac{89}{123}\frac{1}{b}\right) = 0,95 \\
&\Rightarrow && \frac{89}{123}\frac{1}{b} = 3,5 \\
&\Rightarrow && b = 0,21
\end{aligned}$$

2. Considere duas amostras de populações Normais:

A: 2.3, 5.2, 4.1, 2.4, 5.6, 4.2, 1.1, 1.7, 2, 5.3, 4.2, 3.7, 4.1, 5.3, 6.2

B: 3.5, 4.6, 2.9, 4.1, 5.3, 2.1, 6.7, 6, 3.3, 3.1, 3, 2.5, 5.1, 4.7

(a) teste a hipótese da igualdade das variâncias das duas populações (use o nível de significância de 0,07).
Queremos testar $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ versus $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
Vamos considerar a estatística $W = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ que, sob H_0, segue $F_{(14,13)}$.
Queremos uma região crítica do tipo:

$$P(W \in RC) = P(W < f_1 \text{ ou } W > f_2) = 0,07$$

Calculando o extremo superior:

$$P(W > f_2) = 0,035 \Rightarrow f_2 = 2,820$$

Calculando o extremo inferior:

$$P(W < f_1) = 0,035 \Rightarrow f_1 = 0,362$$

Assim a região crítica é dada por:

$$RC = \{w_{obs} < 0,0362 \text{ ou } w_{obs} > 2,820\}$$

Como $w_{obs} = \frac{2,508}{1,893} = 1,324 \notin RC$, não rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias são iguais.

(b) usando o resultado do item (a), verifique se há diferença entre as médias das duas populações, ao nível de significância de 10%.
Queremos testar $H_0 : \mu_A = \mu_B$ contra $H_a : \mu_A \neq \mu_B$.
Como concluímos pela igualdade das variâncias, faremos um teste t não pareado (amostras independentes) com variâncias iguais e desconhecidas.
Comecemos notando que:

$$S_p = \sqrt{\frac{14(2,508) + 13(1,893)}{15 + 14 - 2}} = 1,487$$

Usaremos a estatística T, que segue sob H_0, segue $t_{(27)}$:

$$T = \frac{\overline{A} - \overline{B}}{S_p\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{14}}} = \frac{3,827 - 4,064}{1,487(0,372)} = -0,428$$

Notemos que a região crítica será dada por:

$$RC = \{t_{obs}, |t_{obs}| > 1,703\}$$

Como $t_{obs} = -0,428 \notin RC$, não rejeitamos a hipótese nula, concluindo que as médias são iguais.

3. Queremos verificar se há diferenças entre dois medicamentos, A e B, com relação ao tempo de reação ao medicamento. Para isso, foram colhidas as seguintes amostras:

A: 123, 231, 189, 164, 201, 181, 133, 145, 156, 171, 144, 149, 151, 179

B: 188, 192, 139, 202, 215, 165, 178, 194, 195, 174, 184, 158, 186, 177, 204

Qual seria a conclusão ao nível de significância de 5% (use o teste de Wilcoxon ou o teste de Mann-Whitney)?

Vamos utilizar o teste de Mann-Whitney. Notemos que $n = 14$, $m = 15$ e $N = 29$. Calculemos os postos para obter as outras quantidades que precisamos para fazer o teste:

valor	grupo	posto	valor	grupo	posto
123	A	1	179	A	16
133	A	2	181	A	17
139	B	3	184	B	18
144	A	4	186	B	19
145	A	5	188	B	20
149	A	6	189	A	21
151	A	7	192	B	22
156	A	8	194	B	23
158	B	9	195	B	24
164	A	10	201	A	25
165	B	11	202	B	26
171	A	12	204	B	27
174	B	13	215	B	28
177	B	14	231	A	29
178	B	15			

Calculando $W_S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{15} = 272$. Assim:

$$U_S = W_S - \frac{1}{2}m(m+1) = 272 - \frac{1}{2}15(16) = 152$$

Ainda:

$$E(U_S) = \frac{nm}{2} = 105, \quad Var(U_S) = \frac{nm(N+1)}{12} = 525$$

A região crítica será dada na forma:

$$RC\{u_s, u_s < u_{c1} \text{ ou } u_s > u_{c2}\}$$

Temos assim:

$$\begin{aligned}
P(U_S > u_{c2}) &= 0,025 \Rightarrow P\left(\frac{U_S - 105}{22,91} > \frac{u_{c2} - 105}{22,91}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{u_{c2} - 105}{22,91}\right) = 0,025 \\
&\Rightarrow \frac{u_{c2} - 105}{22,91} = 1,96 \\
&\Rightarrow u_{c2} = 105 + 44,90 = 149,90 \text{ e } u_{c1} = 105 - 44,90 = 60,1
\end{aligned}$$

Logo a região crítica será dada por:

$$RC\{u_s, u_s < 60,1 \text{ ou } u_s > 149,90\}$$

Como $u_s = 152 \in RC$, rejeitamos a hipótese nula de igualdade entre as medidas de centralidade.