

# MAE126 - Noções de Estatística II

Turma Prof. Popov

19 de abril de 2006

## Correção da Lista 3

1. Sabe-se que o peso de um coelho é aproximadamente Normal com  $\mu = 4,2$  e  $\sigma = 0,5$  (kilos). Deseja-se classificar os coelhos como “pequenos”, “médios” e “grandes”, de maneira que 25% de todos os coelhos sejam pequenos, 45% sejam médios, e 30% sejam grandes.

- (a) Quais são os limites de peso para cada categoria?

Seja  $X \sim N(4,2; 0,5^2)$ . Começemos calculando a primeira categoria: queremos que os coelhos com peso abaixo de um valor de corte  $Q_P$  sejam classificados como pequenos, e que esses coelhos correspondam a 25% da população. Assim:

$$\begin{aligned}P(X \leq Q_P) &= 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{X - 4,2}{0,5} \leq \frac{Q_P - 4,2}{0,5}\right) = 0,25 \\&\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{Q_P - 4,2}{0,5}\right) = 0,25\end{aligned}$$

Olhando em uma tabela da distribuição Normal, obtemos que:

$$\frac{Q_P - 4,2}{0,5} = -0,675 \Rightarrow Q_P = 3,862$$

Assim, coelhos pequenos são aqueles cujos pesos estão contidos no intervalo:

$$]-\infty; 3,862]$$

Achemos agora o ponto de corte para coelhos médios:

$$\begin{aligned}P(3,862 \leq X \leq Q_M) &= 0,45 \Rightarrow \\P(3,862 \leq X \leq 4,2) + P(4,2 \leq X \leq Q_M) &= 0,45 \Rightarrow \\P\left(\frac{3,862 - 4,2}{0,5} \leq \frac{X - 4,2}{0,5} \leq 0\right) + P\left(0 \leq \frac{X - 4,2}{0,5} \leq \frac{Q_M - 4,2}{0,5}\right) &= 0,45 \Rightarrow \\P(-0,675 \leq Z < 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{Q_M - 4,2}{0,5}\right) &= 0,45 \Rightarrow \\0,25 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{Q_M - 4,2}{0,5}\right) &= 0,45 \Rightarrow \\P\left(0 \leq Z \leq \frac{Q_M - 4,2}{0,5}\right) &= 0,20\end{aligned}$$

Olhando em uma tabela Normal, temos:

$$\frac{Q_M - 4,2}{0,5} = 0,525 \Rightarrow Q_M = 4,462$$

Assim, coelhos médios são aqueles com peso no intervalo:

$$]3,862; 4,462]$$

E por fim, coelhos com tamanho grande são aqueles com peso no intervalo:

$$]4,462; \infty[$$

Na Figura 1 temos os pontos de corte para cada categoria ilustrados na distribuição dos pesos.

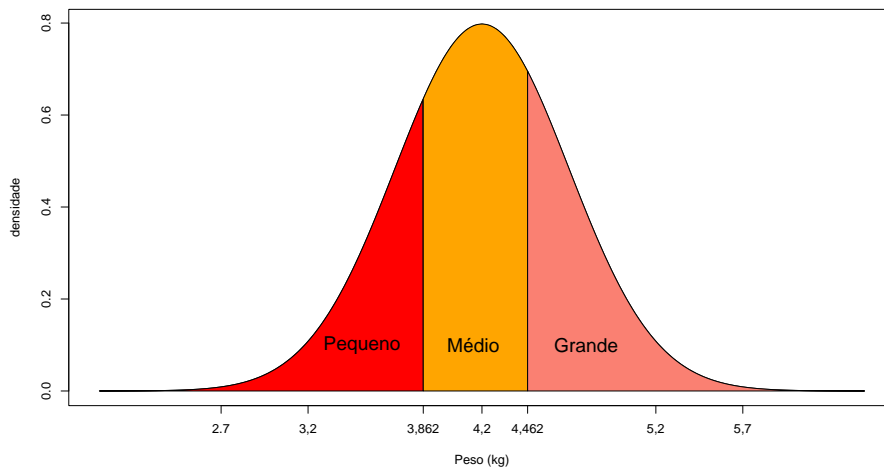


Figura 1: Curva normal da distribuição dos pesos e categorias.

- (b) Dado que um coelho escolhido ao caso é médio, qual é a probabilidade (condicional) que o peso dele ultrapasse 4,3 kilos?

Queremos calcular, em termos do Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(X > 4,3 | X \text{ tem peso médio}) &= P(X > 4,3 | X \in ]3,862; 4,462]) \\ &= \frac{P(X > 4,3 \cap X \in ]3,862; 4,462])}{P(X \in ]3,862; 4,462])} \\ &= \frac{P(4,3 < X \leq 4,462)}{0,45} \\ &= \frac{0,121}{0,45} = 0,269 \end{aligned}$$

2. Considere um par de v.a.  $X, Y$  tais que  $E(X) = 1$ ,  $E(Y) = 2$ ,  $Var(X) = 3$ ,  $E(Y^2) = 5$ ,  $E(XY) = 1$ . Com base nessas informações, calcule  $E(X^2)$ ,  $Var(Y)$ ,  $cov(X, Y)$ ,  $Var(X + Y)$ ,  $Var(2X + 3Y)$ ,  $Var(3X - Y)$ . As v.a.  $X, Y$  podem ser independentes?

- $E(X^2)$ :

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow 3 = E(X^2) - 1 \Rightarrow E(X^2) = 4$$

- $Var(Y)$ :

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

- $Cov(X, Y)$ :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - 1 \times 2 = -1$$

- $Var(X + Y)$ :

$$Var(X, Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) = 3 + 1 + 2 \times -1 = 2$$

- $Var(2X + 3Y)$

$$\begin{aligned} &= Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y) \\ &= 2^2Var(X) + 3^2Var(Y) + 2 \times 2 \times 3Cov(X, Y) = \\ &= 4 \times 3 + 9 \times 1 + 12 \times -1 = 9 \end{aligned}$$

- $Var(3X - Y)$

$$\begin{aligned} &= 3^2Var(X) + 1^2Var(Y) - 3 \times 2Cov(X, Y) = \\ &= 9 \times 3 + 1 + 6 = 34 \end{aligned}$$

$X$  e  $Y$  não podem ser independentes, pois  $Cov(X, Y) \neq 0$ .

3. Escolhemos ao acaso uma pessoa da seguinte lista: Pedro, Ana, Fábio, Lúcia, Roberto, Camila, Roberta. Considere as seguintes variáveis aleatórias:  $X$  = número de letras no nome da pessoa escolhida,

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{se a pessoa escolhida é do sexo masculino,} \\ 1, & \text{se a pessoa escolhida é do sexo feminino.} \end{cases}$$

Calcule:

- (a) A distribuição conjunta de  $X, Y$ , e as distribuições marginais:  
Enumerando os possíveis valores e probabilidades de  $X$  e  $Y$  para cada nome, obtemos a tabela com a distribuição conjunta e as marginais:

$Y/X$	3	5	6	7	$p(y)$
0	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
$p(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	

(b)  $cov(X, Y)$  e  $Var(X + Y)$ .

Notemos que:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Calculemos cada um dos termos acima:

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{7} + 5 \times \frac{3}{7} + 6 \times \frac{1}{7} + 7 \times \frac{2}{7} = 5,428$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{3}{7} + 1 \times \frac{4}{7} = 0,571$$

$$E(XY) = (3 + 5 + 6 + 7) \times \frac{1}{7} = 3$$

Assim:

$$Cov(X, Y) = 3 - 5,428 \times 0,571 = -0,10$$

Agora para calcular  $Var(X + Y)$ :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

Calculando os termos que ainda não temos:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = 3^2 \times \frac{1}{7} + 5^2 \times \frac{3}{7} + 6^2 \times \frac{1}{7} + 7^2 \times \frac{2}{7} = 31,143$$

$$Var(X) = 31,143 - 5,428^2 = 1,680$$

Ainda:

$$E(Y^2) = \frac{4}{7} = 0,571$$

Assim:

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 0,571 - 0,571^2 = 0,245$$

E portanto:

$$Var(X + Y) = 1,680 + 0,245 + 2 \times -0,10 = 1,725.$$