MAE126 - Noções de Estatística II

Turma Prof. Popov

16 de abril de 2006

Correção da Lista 2

1. Lança-se uma moeda e um dado hosnestos, independentemente. Seja:

$$X = \begin{cases} \text{resultado do dado,} & \text{se o resultado da moeda é “cara”} \\ 2 \times \text{(resultado do dado),} & \text{se o resultado da moeda é “coroa”} \end{cases}$$

Calcule $E(X)$, $E(X^{-1})$, $Var(X)$.

Começamos enumerando o os possíveis valores de X para as possíveis combinações de face da moeda e face do dado:

	Face do Dado					
Face da Moeda	1	2	3	4	5	6
Cara	1	2	3	4	5	6
Coroa	2	4	6	8	10	12

Como os lançamentos são independentes e o dado e a moeda são honestos, cada uma das 12 possíveis combinações são equiprováveis, com probabilidade $\frac{1}{12}$. Obtemos então a função de distribuição de probabilidades de X:

X	1	2	3	4	5	6	8	10	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Calculamos então $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) = \sum x_i P(X = x_i) &= 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{2}{12} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{2}{12} \\ &+ 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{2}{12} + 8 \times \frac{1}{12} + 10 \times \frac{1}{12} + 12 \times \frac{2}{12} \\ &= 5,25 \end{aligned}$$

Para calcular $E(X^{-1})$, notamos que:

$$E(g(X)) = \sum g(x_i) P(X = x_i)$$

fazendo $g(x) = x^{-1}$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
E(X^{-1}) = \sum x_i^{-1} P(X = x_i) &= 1 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{12} \\
&+ \frac{1}{5} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{12} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{2}{12} \\
&= 0,30625
\end{aligned}
$$

Por fim, para calcular $Var(X)$, notemos que $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$,
Como já temos $E(X)$, basta encontrarmos $E(X^2)$:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) = \sum x_i^2 P(X = x_i) &= 1 \times \frac{1}{12} + 2^2 \times \frac{2}{12} + 3^2 \times \frac{1}{12} + 4^2 \times \frac{2}{12} \\
&+ 5^2 \times \frac{1}{12} + 6^2 \times \frac{2}{12} + 8^2 \times \frac{1}{12} + 10^2 \times \frac{1}{12} + 12^2 \times \frac{2}{12} \\
&= 37,92
\end{aligned}
$$

E assim:

$$
Var(X) = 37,92 - 5,25^2 = 37,92 - 27,56 = 10,36
$$

2. Considere uma v.a. contínua X com a densidade:

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + Cx^3, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Calcule o valor da constante C. Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Notemos que para $f(x)$ definir uma densidade de probabilidades de uma variável aleatória contínua X, temos que ter a propriedade satisfeita:

$$
\int_{A(x)} f(x) \mathrm{d}x = 1
$$

onde, $A(x)$ é o suporte da variável aleatória X. Nesse caso, $A(x) = [1, 2]$, e assim, devemos ter:

$$
\int_1^2 \frac{x}{4} + Cx^3 \mathrm{d}x = 1
$$

Resolvendo essa integral:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{x^2}{8} + \frac{Cx^4}{4}\right]_1^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \left(\left[\frac{2^2}{8} + \frac{C2^4}{4}\right] - \left[\frac{1}{8} + \frac{C}{4}\right]\right) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{4}{8} + \frac{16C}{4} - \frac{1}{8} - \frac{C}{4} = 1 \\
&\Rightarrow \quad C = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Temos assim que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{x^3}{6}, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para calcular $E(X)$, notemos que para X, v.a. contínua:

$$E(g(X)) = \int_{A(x)} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

e fazendo $g(x) = x$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^2 x \left(\frac{x}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{6} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{30} \right]_1^2 = \left(\left[\frac{8}{12} + \frac{32}{30} \right] - \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{30} \right] \right) \\ &= \frac{194}{120} \approx 1,61667 \end{aligned}$$

Para calcular $Var(X)$, calculamos primeiro $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_1^2 x^2 \left(\frac{x}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{6} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^6}{36} \right]_1^2 = \left(\left[\frac{16}{16} + \frac{64}{36} \right] - \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{36} \right] \right) \\ &= \frac{1548}{576} \approx 2,6875 \end{aligned}$$

Como $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$, temos:

$$Var(X) = 2,6875 - 1,61667^2 = 0.07389$$

3. A probabilidade de que um parafuso seja defeituoso é de 0,005 (isto é 0,5%). Seja Y a quantidade de pafarusos defeituosos numa caixa que contem 300 parafusos.

   (a) Calcule $P(Y = 2)$, $P(Y \geq 3)$ (não use nenhum tipo de aproximação; utilize a calculadora ou talvez algum pacote estatístico).
   Note que $Y \sim Binomial(n = 300, p = 0,005)$. Assim:

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= \binom{300}{2} 0,005^2 (1 - 0,005)^{300-2} \\ &= \frac{300 \times 299}{2} 0,005^2 \times 0,995^{298} \\ &= 0,2518 \end{aligned}$$

Esse valor pode ser obtido diretamente em um pacote estatístico, como no R[1], através do comando:

```
> dbinom(2,300,0.005)
[1] 0.2518
```

Para calcular $P(Y \geq 3)$ notemos que:

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2))$$

Basta então calcular $P(Y = 0)$ e $P(Y = 1)$:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \binom{300}{0} 0,005^0 (1 - 0,005)^{300} \\ &= 0,995^{300} \\ &= 0,2223 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= \binom{300}{1} 0,005^1 (1 - 0,005)^{300-1} \\ &= 300 \times 0,005 \times 0,995^{299} \\ &= 0.3351 \end{aligned}$$

Assim:

$$P(Y \geq 3) = 1 - (0,2223 + 0,3351 + 0,2518) = 0,1908$$

Uma forma de obter esse valor diretamente é através do comando, no R:

```
> 1-pbinom(2,300,0.005)
[1] 0.1908
```

(b) Para o cálculo aproximado de probabilidades acima, deve-se usar a aproximação de Poisson, ou Normal?

Como temos n grande e p pequeno, e ainda que $np = 0,005 \times 300 = 1,5 \leq 7$, devemos usar a aproximação de Poisson (vide página 148 de Morettin e Bussab (2002)).

(c) Calcule as probabilidades do item (a) usando a aproximação do tipo escolhido no item (b).

Usaremos como variável para aproximar Y, a variável X, $X \sim Poisson(\lambda = np = 1,5)$. Assim:

$$P(Y = 2) \approx P(X = 2) = \frac{e^{-1,5} 1,5^2}{2!} = 0,2510$$

Ainda:

[1] Disponível em `http://www.r-project.org`. Veja também: `http://www.feferraz.net/br/rlearn.html`.

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 3) \approx P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \\
&= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\
&= 1 - (0,2231 + 0,3347 + 0,2510) \\
&= 0,1912
\end{aligned}
$$

4. Em uma cidade, 30% dos habitantes são torcedores do time A, 40% são torcedores do time B, e o restante não gosta de futebol. Escolhemos ao acaso 150 habitantes desta cidade, e seja Y o número dos torcedores do time A entre eles.

   (a) Calcule $P(Y = 47)$, $P(Y \leq 40)$ (não use nenhum tipo de aproximação; utilize a calculadora ou talvez algum pacote estatístico)

   Notemos que $Y \sim Binomial(n = 150, p = 0,30)$. Assim:

$$
\begin{aligned}
P(Y = 47) &= \binom{150}{47} 0,30^{47}(1 - 0,30)^{150-47} \\
&= \frac{150 \times ... \times 104}{47!} 0,30^{47} \times 0,70^{103} \\
&= 0,0658
\end{aligned}
$$

   Esse valor pode ser obtido também no R:

```
> dbinom(47,150,0.3)
[1] 0.0658
```

   Para calcular $P(Y \leq 40)$, devemos fazer:

$$
P(Y \leq 40) = \sum_{y=0}^{40} P(Y = y) = \sum_{y=0}^{40} \binom{150}{y} 0,3^y 0,7^{150-y}
$$

   No R, obtemos:

```
> pbinom(40,150,0.3)
[1] 0.2126
```

   Assim, $P(Y \leq 40) = 0,2126$.

   (b) Para o cálculo aproximado de probabilidades acima, deve-use a aproximação de Poisson, ou Normal?

   Como p não é pequeno, e $np = 45 > 7$, devemos usar a aproximação normal. Além disso, como p é próximo de $0,5$ a aproximação normal é ainda mais razoável (vide Meyer (1965), página 266, seção 12.3: 'Aproximação Normal da Distribuição Binomial').

   (c) Calcule as probabilidades do item (a) usando a aproximação do tipo escolhido no item (b).

   Usaremos como aproximadora a variável aleatória X, $X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$. Assim:

$$X \sim N(45; 31,5)$$

Usando a aproximação:

$$\begin{aligned}
P(Y = 47) &\approx P(46,5 \leq X \leq 47,5) = \\
&= P\left(\frac{46,5 - 45}{\sqrt{31,5}} \leq Z \leq \frac{47,5 - 45}{\sqrt{31,5}}\right) \\
&= P\left(\frac{1,5}{5,612} \leq Z \leq \frac{2.5}{5.612}\right) \\
&= P(0,2673 \leq Z \leq 0,4455) \\
&= P(Z \leq 0,4455) - P(Z \leq 0,2673) = 0,0664
\end{aligned}$$

Ainda:

$$\begin{aligned}
P(Y \leq 40) &\approx P(X \leq 40,5) = \\
&= P\left(Z \leq \frac{40,5 - 45}{\sqrt{31,5}}\right) \\
&= P(Z \leq -0,802) \\
&= 0,211.
\end{aligned}$$