MAE126 - Noções de Estatística II

Turma Prof. Popov

9 de abril de 2006

Correção da Lista 1

1. Uma mulher tem 11 amigos, entre os quais ela irá convidar 5 para um chá em sua casa.

   (a) Quantas escolhas ela pode fazer se odis dos seus amigos são desafetos e não aceitariam estar juntos?

   Solução 1:

   Sejam A e B os amigos com desafeto mútuo. Ou A é convidado e B nnão, ou B é convidado e A não, ou ainda nenhum dos dois são convidados.

   Consideremos o caso em que somente um dos dois é convidado. Dos 5 lugares, um já está tomado. Das 11 pessoas, sobram 9 para preencher os outros 4 lugares restantes. Isso pode ocorrer de:

   $$\binom{9}{4} = 126$$

   maneiras distintas. Como tanto A como B podem ser escolhidos para ser convidados, o número de possibilidades em que A ou B são convidados com outros 4 amigos é portanto:

   $$126 \times 2 = 252.$$

   Resta enumerar as possibilidades quando nenhum dos dois são convidados. Nesse caso, escolhemos 5 amigos de 9, resultando em:

   $$\binom{9}{5} = 126$$

   possibilidades. Portanto, o número de escolhas que podem ser feitas é de $252 + 126 = 378$.

   Solução 2:

   Comecemos enumerando o total de possibilidades de convites. Temos 11 amigos para 5 lugares:

   $$\binom{11}{5} = 462$$

possibilidades. Notemos que dessas 462, somente não estamos interessados nos casos em que ambos os dois amigos sentam juntos. Para enumerar essa situação, basta considerarmos que já selecionamos os dois amigos, sobrando portanto 3 lugares para serem escolhidos de 9 amigos:

$$\binom{9}{3} = 84$$

Fazendo $462 - 84 = 372$ obtemos o número de escolhas em que nenhum dos dois sentam juntos.

(b) Quantas escolhas ela pode fazer caso três de seus amigos não aceitassem participar do chá a menos que juntos?

Há duas possibilidades: ou ela convida os três, ou não convida nenhum deles. No primeiro caso, ao escolher os 3, sobram apenas 2 vagas, a serem preenchidas por 8 amigos. Isso pode ser feito de:

$$\binom{8}{2} = 28$$

maneiras diferentes. No segundo caso, nenhum dos três é chamado, isso podendo ser feito de:

$$\binom{8}{5} = 56$$

maneiras diferentes. Temos portanto $28+56 = 84$ maneiras diferentes de convidar os amigos.

Obs. Os itens (a) e (b) tratam de duas situações diferentes (não é para supor que no item (b) há também os desafetos do item (a)). Nos dois itens somente será aceita uma resposta numérica (nada de coeficientes binomiais na resposta!).

2. Quantas "palavras" diferentes podem ser compostas usando as letras:

(a) MESTRADO

Temos 8 letras diferentes. Portanto $8! = 40320$ anagramas.

(b) CERVEJA

Temos 7 letras, sendo uma delas repetida 2 vezes, resultando:

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

anagramas.

(c) BANANA

Temos 6 letras, uma repetida duas vezes, a outra repetida três vezes, resultando:

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

anagramas.

3. Uma urna possui 5 bolas vermelhas, 6 azuis e 3 verdes. Se vamos retirar 3 bolas aleatoriamente desta urna, qual a probabilidade de que todas as bolas sejam da mema cor? Qual a probabilidade de que cada bola seja de uma cor distinta?

   Primeiro notemos que podemos selecionar as bolas de:

$$\binom{14}{3} = 364$$

   maneiras possíveis. Desse total, podemos selecionar somente bolas vermelhas de $\binom{5}{3} = 10$ maneiras, somente bolas azuis de $\binom{5}{3} = 20$ e somente bolas verdes de $\binom{3}{3} = 1$ maneira. Obtemos então que a probabilidade de selecionar somente bolas de uma dada cor é:

$$\frac{\binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{10 + 20 + 1}{364} = \frac{31}{364} = 8,51\%$$

   Para a segunda parte do problema, notemos que o número de maneiras que podemos selecionar uma bola vermelha, uma azul e uma verde é dada por: $5 \times 6 \times 3$. Dividindo isso pelo total de maneiras possíveis de selecionar 3 bolas de 14, obtemos:

$$\frac{5 \times 6 \times 3}{364} = \frac{90}{364} = 24,72\%$$

4. Uma empresa tem 277 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo?

Idade/Sexo	Homens (M)	Mulheres (F)	Total
$<$ 25 anos (A)	40	51	91
25-35 anos (B)	43	42	85
$>$ 35 anos (C)	57	44	101
Total	140	137	277

   Uma pessoa que trabalha nessa empresa é escolhida ao caso. Calcule as seguintes probabilidades: $P(M)$, $P(B)$, $P(A \cap F)$, $P(C \cup M)$, $P(B|F)$, $P(M|A)$. Os eventos A e F são independentes?

$$P(M) = \frac{140}{277} = 50,5\%$$

$$P(B) = \frac{85}{277} = 30,7\%$$

$$P(A \cap F) = \frac{51}{277} = 18,4\%$$

$$P(C \cup M) = P(C) + P(M) - P(C \cap M) = \frac{101 + 140 - 57}{277} = \frac{184}{277} = 66,4\%$$

$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F}{P(F)} = \frac{42}{137} = 30,7\%$$

$$P(M|A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{40}{91} = 44,0\%$$

Os eventos A e F não são independentes, pois $P(A|F) = \frac{51}{137} \neq P(A) = \frac{91}{277}$.

5. Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 4 amarelas e 2 verdes. Lançamos um dado, e se o resultado for i, retiramos i bolas da urna. Aconteceu que todas as bolas retiradas eram da mesma cor. Qual é a probabilidade que o resultado do dado tenha sido 3?

   Vamos definir como A o evento: *todas as bolas retiradas eram da mesma cor*. A probabilidade que procuramos, pode ser então expressa através de uma probabilidade condicional:

$$P(i = 3|A)$$

   Obter essa probabilidade diretamente parece um pouco complicado. Vamos então usar o teorema de Bayes para chegar numa expressão com a qual possamos trabalhar:

$$P(i = 3|A) = \frac{P(i = 3 \cap A)}{P(A)} \tag{1}$$

   Note agora que podemos escrever $P(i = 3 \cap A)$, em função de $P(A|i = 3)$, através, novamente, da aplicação do teorema de Bayes:

$$P(A|i = 3) = \frac{P(A \cap i = 3)}{P(i = 3)} \Rightarrow P(i = 3 \cap A) = P(A|i = 3)P(i = 3)$$

   Substituindo essa expressão na equação (1), temos:

$$P(i = 3|A) = \frac{P(A|i = 3)P(i = 3)}{P(A)} \tag{2}$$

   Agora todos os termos na equação (2) são mais fáceis de se obter. Comecemos com o numerador:

$$P(A|i = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{84}$$

$$P(i = 3) = \frac{1}{6}$$

Para calcular o numerador, basta utilizarmos o teorema da probabilidade total de Bayes, condicionando nas possíveis faces do dado:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{6} P(A|i=j)P(i=j) \tag{3}$$

Vamos obter assim cada $P(A|i=j)$, para $j = 1, \ldots, 6$:

$$\begin{aligned}
P(A|i=1) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{3+4+2}{9} = 1 \\
P(A|i=2) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3+6+1}{36} = \frac{10}{36} \\
P(A|i=3) &= \frac{5}{84} \text{ (já calculamos anteriormente)} \\
P(A|i=4) &= \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{1}{126} = \frac{10}{36} \\
P(A|i=5) &= 0 \\
P(A|i=6) &= 0
\end{aligned}$$

Voltando esses resultados na equação (3), obtemos:

$$P(A) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{10}{36} + \frac{5}{84} + \frac{1}{126} + 0 + 0\right)$$

Voltando os valores obtidos na equação (2), obtemos por fim:

$$P(i=3|A) = \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{84}}{\frac{1}{6}\left(1 + \frac{10}{36} + \frac{5}{84} + \frac{1}{126}\right)} = \frac{\frac{5}{84}}{\left(1 + \frac{10}{36} + \frac{5}{84} + \frac{1}{126}\right)} = 4,42\%$$

6. Lançamos 2 dados honestos, e seja $A = \{\text{a soma dos resultados é } 8\}$ e $B = \{\text{o produto dos resultados é impar}\}$. Os eventos A e B são independentes?

   Enumeremos os conjuntos de pares A e B:

$$\begin{aligned}
A &= \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} \\
B &= \{(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (3,3), (3,5), (5,3), (3,3)\}
\end{aligned}$$

   A partir daí temos:

$$P(A) = \frac{5}{36}, P(B) = \frac{9}{36}, P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

   Notemos agora que A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Mas aqui:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} \neq \frac{5}{36} \times \frac{9}{36}$$

Logo A e B *não* são independentes.

7. Suponha que $P(A) = 1/2$, $P(B^C) = 1/3$. Os eventos A e B podem ser disjuntos (ou mutuamente exclusivos)?

   Do enunciado temos que $P(B) = 2/3$. Se A e B são disjuntos, então $P(A \cap B) = 0$). Mas:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   e portanto:

   $$P(A \cup B) = 1/2 + 1/3 - 0 > 1$$

   O que é absurdo, logo A e B não podem ser disjuntos.