Universidade de São Paulo
Instituto de Física **– FAP 115 –** Prof°**. Kiyomi Koide** **TURMA A**
São Paulo, 16 de Junho de 2002

Relatório - 6ª Experiência
-
Cordas Vibrantes

Fernando Henrique Ferraz Pereira da Rosa
IME – Bach. Estatística

Objetivo

Determinação empírica da relação entre a freqüência de ressonância e a tração e o comprimento numa corda esticada e presa em duas extremidades. Análise de gráfico, uso do gráfico log-log, determinação da função matemática.

Material Utilizado

Fio de nylon TopFlex, diâmetro: 0,50 mm, comprimento L = (1,71 ± 0.05) m. Diversos pesos de diversas trações. Auto-falante, suporte de peso, gerador de áudio, freqüencímetro, paquímetro, trena.

Experiência

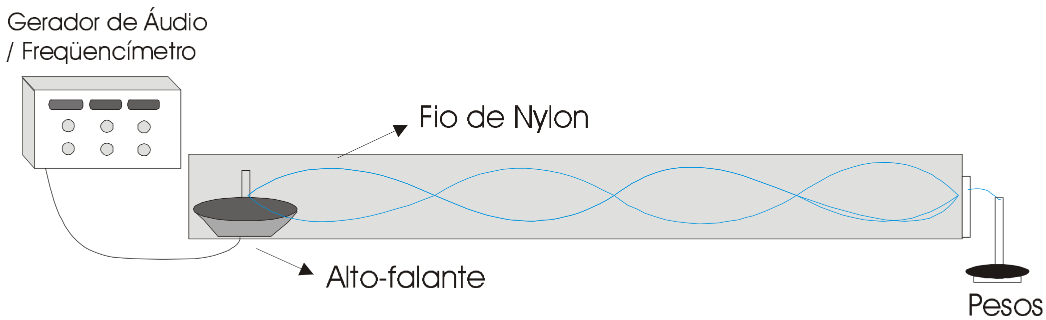

FIGURA 1 – Arranjo Experimental

Montamos o experimento conforme o arranjo ilustrado acima. Começamos com uma tração de 110,3 gf e fomos aumentando esse valor até 412,6 gf. Para cada um desses ajustes, procuravamos as freqüências adequadas para que pudessemos observar um certo número de ventres. Com uma tração de 110,3 gf conseguimos observar de 1 a 6 ventres, com as outras trações observamos até 4.

Q1. Descreva o que você observou e estabeleça um critério para definir o comprimento do fio *L* e sua incerteza.

Observamos que em certas freqüências temos bem ondas com ventres bem definidos. Para determinar o comprimento *L* do fio, basta acharmos a freqüência que deixa um ventre definido e medimos o comprimento ponta a ponta desse ventre. Conforme, ilustrado abaixo:

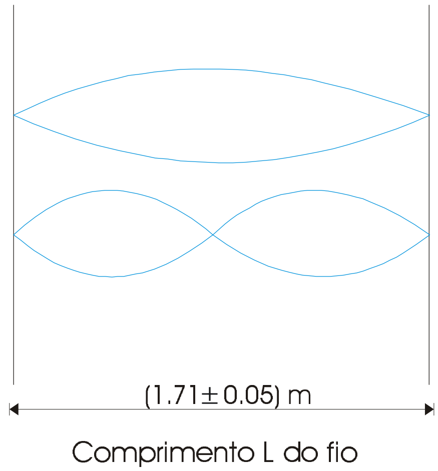

FIGURA 2 – Método para determinar o comprimento do fio

A incerteza pode ser determinada variando-se a freqüência e voltando-se a ela novamente, e verificando quanto que o comprimento dos pontos ventre a ventre varia. O valor encontrado foi de ±0.05 m.

Q2. Encontre as freqüências de ressonância para diversos valores de *n* (pelo menos até n = 6). Apresente os resultados em forma de tabela, anotando todas as condições correspondentes às variáveis da experiência. Apresente também os gráficos, análise e conclusão parcial do estudo *f* x *n*.

Tensão: (110,3 ± 0.1) gf

f (± 1) Herz	n (ventres)	λ/2 (cm)
-	1	-
42	2	85.5
61	3	42.7
80	4	21.3
99	5	10.6
119	6	5.3

Vide Gráfico 1 – Freqüencia x Ventres (anexo).
O gráfico de f x n no papel di-log deu uma reta. Isso significa que deve haver uma relação:

$$\log f = \alpha \log n + \log c_1$$

$$\log \frac{f}{c_1} = \log n^{\alpha}$$

$$f = c_1 n^{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\log f_2 - \log f_1}{\log n_2 - \log n_1} = \frac{\log \frac{f_2}{f_1}}{\log \frac{n_2}{n_1}}$$

Para T = 110,3 gf, que é o caso acima, calculemos esse valor de α, assim como o valor de α_{min} e α_{max} para que possamos determinar a incerteza do valor de α.

$$\alpha = \frac{\log \frac{135}{30}}{\log \frac{7}{1.45}} = 0.95 \quad \alpha_{\min} = \frac{\log \frac{190}{26}}{\log \frac{10}{1.2}} = 0.93 \quad \alpha_{\max} = \frac{\log \frac{160}{25}}{\log \frac{8}{1.2}} = 0.97$$

Logo, α = (0.95 ± 0.02), $^{\text{Herz}}/_{\text{ventres}}$, $c_1 \approx F/n =$ (21 ± 1)

Q3. Estude a dependência de *f* com a tração *T* no fio. Para que possamos obter melhores informações é interessante variar a tração em uma faixa razoavelmente ampla. Deve obter as freqüências de alguns valores de *n* para cada tração. Construa uma tabela correspondente e tente encontrar a função matemática que descreve *f* em função de *T*. Como poderia linearizar a curva obtida? Quais são as informações que poderiam ser extraídas dos gráficos no papel log-log? Represente os dados da tabela em um gráfico log-log. Faça uma análise para obter a função matemática e os parâmetros desta função. Discuta a compatibilidade dos seus resultados com a equação (10) e obtenha a conclusão parcial deste estudo.

Tensão: (222.2 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**n (ventres)**
29	1
57	2
86	3
115	4

Tensão: (306.8 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**n (ventres)**
32	1
65	2
100	3
132	4

Tensão: (412.6 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**n (ventres)**
39	1
79	2
117	3
160	4

Tensão: (61.7 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**n (ventres)**
-	1
35	2
45	3
55	4
66	5

Vide Gráfico 1 – Freqüência x Tensão (anexo).

Os gráficos f x n, deram retas no papel di-log, isso implica que deve existir o mesmo tipo de relação que a vista na questão anterior (quando T = 110.3 gf).
Calculemos os parâmetro α e c_1 dessas retas para cada valor de T.

T = (61.7 ± 0.1) gf

$$\alpha = \frac{\log \frac{96}{24.6}}{\log \frac{9}{1.2}} = 0.67 \quad \alpha_{\min} = \frac{\log \frac{82}{26}}{\log \frac{8}{1.4}} = 0.65 \quad \alpha_{\max} = \frac{\log \frac{98}{30}}{\log \frac{9}{1.7}} = 0.71$$

Logo, α = (0.67 ± 0.03) $^{\text{Herz}}/_{\text{ventres}}$, $c_1 \approx F/n = (17 \pm 1)$

T = (222.2 ± 0.1) gf

$$\alpha = \frac{\log \frac{144}{40}}{\log \frac{5}{1.4}} = 0.99 \quad \alpha_{\min} = \frac{\log \frac{220}{35}}{\log \frac{9}{1.2}} = 0.96 \quad \alpha_{\max} = \frac{\log \frac{205}{28}}{\log \frac{7}{1}} = 1.02$$

Logo, α = (0.99 ± 0.03) $^{\text{Herz}}/_{\text{ventres}}$, $c_1 \approx F/n = (29 \pm 1)$

T = (306.8 ± 0.1) gf

$$\alpha = \frac{\log \frac{162}{40}}{\log \frac{5}{1.25}} = 1.00 \quad \alpha_{\min} = \frac{\log \frac{255}{32.1}}{\log \frac{8}{1}} = 0.99 \quad \alpha_{\max} = \frac{\log \frac{270}{33}}{\log \frac{8}{1}} = 1.01$$

Logo, α = (1.00 ± 0.01) $^{\text{Herz}}/_{\text{ventres}}$, $c_1 \approx F/n = (32 \pm 1)$

T = (412.6 ± 0.1) gf

$$\alpha = \frac{\log \frac{240}{54.5}}{\log \frac{6}{1.4}} = 1.01 \quad \alpha_{\min} = \frac{\log \frac{230}{42}}{\log \frac{6}{1.1}} = 1.00 \quad \alpha_{\max} = \frac{\log \frac{287}{44}}{\log \frac{7}{1.2}} = 1.06$$

Logo, α = (1.01 ± 0.05) $^{\text{Herz}}/_{\text{ventres}}$, $c_1 \approx F/n = (39 \pm 1)$

Na maioria dos casos o valor do parâmetro α ficou dentro da margem esperada (em torno de 1), com exceção para T = 61.7gf. Concluimos que deve ter havido algum erro grosseiro de medição quando foram tomados os dados referentes a essa tração, de forma que nas análises posteriores, vamos descartar esses dados.

Analisemos agora a Freqüência x Tensão:

n (ventres) = 1	
f (± 1) Herz	**T (± 0.1) gf**
-	110.3
29	222.2
32	306.8
39	412.6

n (ventres) = 2	
f (± 1) Herz	**T (± 0.1) gf**
42	110.3
57	222.2
65	306.8
79	412.6

n (ventres) = 3	
f (± 1) Herz	**T (± 0.1) gf**
61	110.3
86	222.2
100	306.8
117	412.6

n (ventres) = 4	
f (± 1) Herz	**T (± 0.1) gf**
80	110.3
115	222.2
132	306.8
160	412.6

Vide Gráfico 2 – Freqüência x Tensão em anexo.
Os dados plotados deram 4 retas. Se foram retas em di-log temos novamente uma relação similar as duas últimas, ie:

$$\log f = \beta \log T + \log c_2$$

$$\log \frac{f}{c_2} = \log T^{\beta}$$

$$f = c_2 T^{\beta}$$

$$\beta = \frac{\log f_2 - \log f_1}{\log T_2 - \log T_1} = \frac{\log \frac{f_2}{f_1}}{\log \frac{T_2}{T_1}}$$

Calculando β e c_2 para cada um dos n:

n = 1

$$\beta = \frac{\log \frac{59}{19}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.49 \quad \beta_{\min} = \frac{\log \frac{56}{21}}{\log \frac{900}{120}} = 0.48 \quad \beta_{\max} = \frac{\log \frac{60}{19.2}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.50$$

Logo, β = (0.49 ± 0.01) $^{\text{Herz}}/_{\text{gf}}$, $c_2 \approx F\big/\sqrt{T} =$ (1.9 ± 0.2)

n = 2

$$\beta = \frac{\log \frac{127}{40}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.50 \quad \beta_{\min} = \frac{\log \frac{123}{39}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.49 \quad \beta_{\max} = \frac{\log \frac{125}{38}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.51$$

Logo, β = (0.50 ± 0.01)$^{\text{Herz}}/_{\text{gf}}$, $c_2 \approx F\big/\sqrt{T} =$ (3.8 ± 0.1)

n = 3

$$\beta = \frac{\log \frac{181}{56}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.50 \quad \beta_{\min} = \frac{\log \frac{179}{57}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.49 \quad \beta_{\max} = \frac{\log \frac{185}{57}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.51$$

Logo, β = (0.50 ± 0.01)$^{\text{Herz}}/_{\text{gf}}$, $c_2 \approx F\big/\sqrt{T} =$ (5.7 ± 0.1)

n = 4

$$\beta = \frac{\log \frac{250}{75}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.52 \quad \beta_{\min} = \frac{\log \frac{245}{77}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.50 \quad \beta_{\max} = \frac{\log \frac{262}{73}}{\log \frac{1000}{100}} = 0.55$$

Logo, β = (0.52 ± 0.03)$^{\text{Herz}}/_{\text{gf}}$, $c_2 \approx F\big/\sqrt{T} =$ (7.6 ± 0.1)

Os valores calculados de β ficaram dentro do esperado (0.5).

Q4. Estudo da dependência *f* x *L*. Apresente tabelas de dados, gráficos, análise e as conclusões. Estude a compatibilidade dos resultados com a equação (10). O que você conclui com esta análise?

Tensão: (110.3 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**L (cm)**
-	171 ± 5
42	85.5 ± 2.5
61	57.0 ± 1.7
80	42.8 ± 1.5

Tensão: (222.2 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**L (cm)**
29	171 ± 5
57	85.5 ± 2.5
86	57.0 ± 1.7
115	42.8 ± 1.5

Tensão: (306.8 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**L (cm)**
32	171 ± 5
65	85.5 ± 2.5
100	57.0 ± 1.7
132	42.8 ± 1.5

Tensão: (412.6 ± 0.1) gf	
f (± 1) Herz	**L (cm)**
39	171 ± 5
79	85.5 ± 2.5
117	57.0 ± 1.7
160	42.8 ± 1.5

Novamente, plotando esses valores no papel di-log (vide Gráfico 3 – Freqüência x Comprimento) em anexo, obtivemos retas.
Se temos uma reta em papel di-log novamente temos uma relação do tipo:

$$\log f = \gamma \log L + \log c_3$$

$$\log \frac{f}{c_3} = \log L^{\gamma}$$

$$f = c_3 L^{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{\log f_2 - \log f_1}{\log L_2 - \log L_1} = \frac{\log \frac{f_2}{f_1}}{\log \frac{L_2}{L_1}}$$

Calculando γ e c_3, e suas incertezas para as várias tensões:

T = (110.3 ± 0.1) gf

$$\gamma = \frac{\log \frac{144}{40}}{\log \frac{200}{20}} = -0.99 \quad \gamma_{\min} = \frac{\log \frac{16.5}{180}}{\log \frac{200}{20}} = -1.03 \quad \gamma_{\max} = \frac{\log \frac{18.3}{158}}{\log \frac{200}{20}} = -0.93$$

Logo, γ = (-0.99 ± 0.06) $^{\text{Herz}}/_{\text{cm}}$, $c_3 \approx FL =$ (3.5 ± 0.2).10^3

T = (222.2 ± 0.1) gf

$$\gamma = \frac{\log\frac{24}{249}}{\log\frac{200}{20}} = -1.01 \quad \gamma_{\min} = \frac{\log\frac{23.9}{269}}{\log\frac{200}{20}} = -1.05 \quad \gamma_{\max} = \frac{\log\frac{25}{240}}{\log\frac{200}{20}} = -0.98$$

Logo, γ = (-1.01 ± 0.04)$^{Herz}/_{cm}$, $c_3 \approx FL =$ (4.7 ± 0.2).10^3

T = (306.8 ± 0.1) gf

$$\gamma = \frac{\log\frac{27}{290}}{\log\frac{200}{20}} = -1.03 \quad \gamma_{\min} = \frac{\log\frac{26.8}{310}}{\log\frac{200}{20}} = -1.06 \quad \gamma_{\max} = \frac{\log\frac{280}{28}}{\log\frac{200}{20}} = -1.00$$

Logo, γ = (-1.03 ± 0.03)$^{Herz}/_{cm}$, $c_3 \approx FL =$ (5.5 ± 0.2).10^3

T = (412.6 ± 0.1) gf

$$\gamma = \frac{\log\frac{33}{340}}{\log\frac{200}{20}} = -1.01 \quad \gamma_{\min} = \frac{\log\frac{32}{400}}{\log\frac{200}{20}} = -1.09 \quad \gamma_{\max} = \frac{\log\frac{34.5}{330}}{\log\frac{200}{20}} = -0.98$$

Logo, γ = (-1.01 ± 0.08)$^{Herz}/_{cm}$, $c_3 \approx FL =$ (6.7 ± 0.2).10^3

Os valores calculados de γ foram compatíveis com o valor esperado (-1).

Analisando no geral, pudemos observar que os valores de c_1,c_2 e c_3 cresciam mais ou menos de acordo com uma progressão arimética, explicando o porque de apesar do coeficiente angular ser o mesmo as retas plotadas no di-log não eram coincidentes.

Q5. Unificando as informações obtidas na análise dos dados experimentais, apresente a função $f = f(n,L,T)$ com respectivos parâmetros com incerteza.

Partindo de (10) chegamos em:

$$f = cn^{\alpha}T^{\beta}L^{\gamma}$$

Substituindo os valores que encontramos para α, β *e* γ:

$$(1)\ f = c\frac{n}{L}\sqrt{T} \Rightarrow (2)\ f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Substituindo alguns valores que temos de f, n, L e T podemos encontrar uma aproximação para *c:*

$$f = c\frac{2}{171}\sqrt{306.8} \Rightarrow c = (317 \pm 2)$$

Então:

$$f = 317\frac{n}{L}\sqrt{T}$$

Podemos verificar essa aproximação testando os valores de *f* que encontrariamos, dados *n*, *L* e *T*:

Para *n* = 3, *L* = 171 e *T* = 412.6, calculemos *f:*

$$f = 317.\frac{3}{171}\sqrt{412.6} = 112\ Herz.$$

Valor próximo do valor observado (vide Tabela à página 8) que era 117 *Herz.*

Essa constante *c* portanto deve se relacionar a outros fatores que não foram variados no experimento, como a densidade linear da corda, o que justifica a passagem de (1) para (2).

Bibliografia

ADDED, Nemitala. *Guia de Estudos: Laboratório de Física I Para Matemáticos*. 2002.

ALVARENGA, Beatriz. *Curso de Física 2*. 4ª ed. São Paulo, Scipione, 1997.